

# ESAME ANALITICO

DI ALCUNI PUNTI CONCERNENTI

LA

# DOTTRINA DEGL' INTERESSI

DI

GIOVANNI GRATOGNINI

PROF. DI MAT. APPL. NELL'UNIVERSITA' DI PAVIA

Nimirum idem omnes fallimur....
*Catull. ad Varr. Carm. XVI.*



IN PAVIA

Nella Tipografia Bolzani.
*Anno IX. Rep.*, e 1800. v. s.

Les plaintes qu' il ( Fontenelle ) en porte......
et qui ont été répetées dans plusieurs ouvrages, offrent un exemple de la facilité avec laquelle les erreurs passent de livre en livre, et montrent combien peu de gens prennent soin de se former une opinion indépendante de celle des autres.

*Lacroix Calc. Diff. et Cal. Int. Pref.* pag. xx.

# PREFAZIONE.

Sebbene sieno le Matematiche per se infallibili, e necessariamente veri i risultati ch' esse ci presentano, non sono però che uomini quelli che le trattano; nè l'infallibilità di tali scienze, di questo esattissimo stromento, bastar può a garantirli da ogni loro fallacia: lo sgraziato retaggio di essere mai sempre soggetti ad ingannarsi, per sventura, è sempre loro fedele compagno. Se si avessero de' conotati, onde decidere che tale o tal altro risultato è risultato puramente della scienza, in tal caso il risultato sarebbe sicuro, sarebbe vero, sarebbe

necessario; ma se è l'uomo, che usando tale stromento trova un risultato, chi può assicurare che il risultato stesso sia piuttosto risultato dello stromento, che della debolezza umana? Uno stromento esatto darà de' risultati esatti, esattamente adoperato; ma bisogna assicurarsi d'essersene servito esattamente; senza di che niente di certo, niente di sicuro. E' impossibile che due e due non faccian quattro; ma non è impossibile che uomo possa contare altrimenti. In sostanza bisogna accordarlo: intanto che l'uomo è uomo è sempre fallibile *, e con qualunque stromento in mano può sempre sbagliare. I primi uomini, i più grandi matematici, perchè uomini, caddero

* Nimirum idem omnes fallimur...

essi pure in errori ; sebbene però in proporzione molto minore degli altri, essendo essi appunto i più abili, i più capaci di usare con esattezza lo stromento di cui parliamo.

Una specie quindi di autorità non è irragionevole anche in Matematica, avendo cioè riguardo all' abilità, alla franchezza, alla destrezza, con cui un uomo è capace di maneggiare il calcolo a differenza di altri, e più ancora alla profondità e forza di penetrazione. Per un' eguale specie di autorità non sarà mai troppo il rispetto da aversi agli uomini grandi, nè saremo mai abbastanza guardinghi nell' erigerci in giudici per condannare i loro errori, essendo troppo facil cosa l'essere portati dall'amor proprio a supporre errori in altri, non potendo crederne o sospettarne in noi medesimi.

Per un altro verso poi lo stesso concetto, la stessa fiducia, per cui siam portati a giurare sulla parola d'uomini sommi, può essere tal volta, come lo è di fatto, perniciosissimo. Se un uom grande commette un errore, troppo facilmente e con tutta franchezza si cammina tosto sui di lui passi, e non fassi quindi che confermare l'error medesimo. In eguale inganno possiam trovarci di prendere l'errore per una verità, e per tale confermarlo ancora, quando quello, senza essere effettivamente, venga soltanto creduto un prodotto dello studio, de' talenti, della penetrazione di uomo, che superiore si è mostrato a quelli della classe ordinaria.

Interessantissimo quindi, o meglio, dovere dell' uom morale io re-

puto il rilevare uno sbaglio, che creduto si sia una verità da uom grande manifestata, e confermata poi da altri, quando questo ridondar può in svantaggio d'alcuno. Tale è il motivo per cui di presente io m'accingo a scrivere. Ma sarò io poi sicuro di non errare io stesso, supponendo errori in altri? Quì sta il punto principale, il punto interessante, la cui decisione non è di mia competenza! In ogni modo io espongo le mie viste alla disamina di ciascuno, ed al giudizio, esatto o inesatto pure di ciascuno, lascio la facoltà di giudicarmi.

L'importante operetta sulla dottrina degl'interessi pubblicata l'anno scorso (1) dal rispettabile mio Collega



(1) Dissi *l'anno scorso*, perchè era mia intenzione di pubblicare il presente scritto sino

il Prof. Lotteri credo vada macchiata di certa svista, che quanto delicata è altrettanto più importa che venga rilevata. Essa influisce su d' un risultato, che messo in uso nella società, esporrebbe alcuno a rischio d' essere anche considerevolmente danneggiato; essa riguarda in sostanza l' importante e più semplice problema degl' interessi composti, qual è quello di trovare il montante di un dato capitale impiegato a censo composto per un tempo qualunque. Ma sento dirmi: e non fu questo problema già sciolto da mille e mille persone, onde dedurre che ogni sospetto d' errore nella soluzione del medesimo è cosa affatto ridicola? Non furono gli Au-

dall' anno VII. Rep., e che per alcuni riguardi differii sino ad ora a farlo.

tori tutti d' accordo nel risultato che ne hanno dedotto? Com' è mai possibile incorrere ivi in una svista?

Io credo che fino ad ora niuno abbia preteso di accusare per erroneo o difettoso il risultato che la comune degli Analisti ha trovato, e che pretendesse darne un altro diverso. Il mio Collega però pare abbia creduto il contrario; pare abbia creduto che Giac. Bernoulli, Gio. Keill, Greg. Fontana, Paolo Frisi, tenendo nella soluzione una via, che altri non hanno tenuta, giugnessero a un risultato ben diverso dal trovato comunemente; e quindi, a quello attenendosi, falso ha egli creduto il risultato comune (2).

---

(2) Egli è al §. 12. della citata sua Opera che il Prof. Lotteri fa intendere d' essersi ac-

Prima per altro di passare a un tal giudizio ragion vuole che si abbia

cordato coi Geometri Bernoulli, Keill, Fontana, e Frisi nel risultato che si cerca coll' enúnciato problema dell' interesse composto; ed al §. 14. dove incomincia a condannare per falsa la formola trovata pel problema stesso da d'Alembert e dalla comune degli Analisti.

Leggendo io quest' Opera in campagna, dove non poteva avere gli Autori indicati da consultare, mi faceva meraviglia e restava sorpreso che uomini tanto profondi fossero incorsi nella svista, che io aveva osservato nell' Opera medesima; e più ancora che un Fontana fosse in contraddizione seco lui stesso per ciò che detto aveva nell' Articolo Anatocismo del Prodromo dell'Enciclop. Ital. Pure, vedendo che il Prof. Lotteri lo asseriva con tutta franchezza ed ingenuità, non potei a meno di prestarvi fede. Quindi riflettendo che tale svista ridondare potea a svantaggio d'alcuno, giudicai dovere di uom onesto il farla rilevare; e m' accinsi tosto a scrivere. Quando poi ho potuto osservare

a maturar bene, e ponderar tutto colla massima attenzione ed esattezza, essendo, non impossibile, ma estremamente difficile che tutti, o quasi tutti incorrano nel medesimo errore. E' vero che si hanno esempj di tal fatta, o piuttosto sembra aversene, giacchè per lo più si guidan

gli Autori medesimi, e vedere cosa detto si avevano, con molto maggiore meraviglia dovetti restarmi, trovando che il mio Collega aveva preso altro equivoco nel credere che gli enunciati Autori si fossero trovati con lui d'accordo; quand' anzi nominatamente Fontana e Frisi con espressa avvertenza mostrato avevano di non trovarvisi per conto alcuno. E così richiamatomi io pure dall' inganno, in cui trovato mi era, in vece di scorgere in ciò che esposto m'aveva cosa che per anco non fosse stata detta, vi trovai ovunque un falso supposto per appoggio, in sostanza vidi che il tutto era vestito chimericamente.

pensieri universali quelli che non sono che d'un uom solo o di pochi uomini *; ma non perciò è prudenza di arrendersi alle prime apparenze; e conviene pure osservare se uomini grandi si sieno occupati dell' oggetto stesso, e se vi si sieno occupati con serietà.

Così non fu sciolto il problema, di cui si parla, anzi non fu esso analizzato sino nell' ultima radice da un d'Alembert? Era facil cosa che un metafisico sì profondo, un filosofo tanto rinomato cadesse pur egli in errore, dopo aver anche veduto la nominata soluzione dei Bernoulli ec.? D'Alembert era uomo, e uomo potea sbagliare. Conveniva peraltro scopri-

* Les plaintes qu'il en port etc.

re il vizio del di lui andamento, e mostrare dove esso consisteva; nè vale il dire, che la formola non è vera in tutti i casi, perchè avuta per induzione soltanto da casi particolari (3); bisognava non solo asserirlo, bisognava dimostrarlo; quand' anzi d' Alembert potea mostrare in vece che è sempre verissima, e come è pressochè dimostrato da altri (4), e dimostreremo noi pure. A buon conto, si dirà, il risultato di Bernoulli ec. non è lo stesso che quello di d'Alembert e di tutti gli altri; onde uno dei due è necessariamente falso: quì non trattasi di ambiguità di se-

(3) Il §. 14. dell' Opera stessa è ancora il luogo da consultare.

(4) Vedasi Fontana Disquisit. Physico-Mathem. Papiae 1780, Disq. III.

gno, nè di funzione moltiforme, ma di due formole essenzialmente diverse, e queste non possono essere il risultato dello stesso problema; onde una delle due dev' essere assolutamente falsa.

Prima però di precipitare una decisione gioverà riflettere se appunto un solo problema abbiasi in quistione, se il problema che condusse i Bernoulli ec. a diverso risultato non fosse esso stesso diverso da quello che gli altri si sono proposto. Un tal sospetto in vero sembra non meno strano che irragionevole; giacchè dai citati Geometri si cercò il montante di un capitale impiegàto ad interesse composto continuo (5), e pa-

(5) Osservisi il §. 1. dell' attuale scritto. Vedremo in seguito che il problema proposto

rimenti il montante di un capitale impiegato ad interesse composto continuo si cercò da d'Alembert e dalla comune degli Analisti; onde è fuor di dubbio che il problema propostosi tanto dagli uni che dagli altri è lo stesso. No, malgrado un' apparenza sì imponente il problema propostosi dai Bernoulli etc. non è assolutamente il problema che proposto si sono gli altri (6).

---

dai Geometri stessi non può chiamarsi *di censo composto continuo* che impropriamente.

(6) E' tanto vero che si hanno due problemi in quistione, cioè che quello propostosi da Bernoulli è diverso da quello che si propose d'Alembert e la comune degli Analisti, che Keill, *Introd ad veram Physic. etc De Nat. et Arith. Log. pag.* 176., oltre al primo, tocca in tal qual modo anche il secondo, nè i suoi calcoli portano a risultato che punto sia discordante dal risultato comune;

Ma qui pure non basta asserire; convien far sentire ciò che si avvan-

---

che Frisi poi *Operum Tom. Pr. De Probl. Cens. Comp. App.*, oltre al primo, non solo si propone anche il secondo, e ne dà per risultato la formola data comunemente, ma, come è già detto, fa anche espressamente avvertire che l'un problema non può confondersi coll' altro;

che Fontana in fine, oltre all' essersi già proposto, *Prodromo dell' Encicl. Ital. Art. Anatocismo*, il problema che proposto si sono d'Alembert e la comune degli Analisti, ed aver trovato per risultato la formola ch' essi trovarono, ed aver pur detto quanto basta per mostrarsi onninamente d'accordo con d'Alembert ec., nuovamente, *Disquisit. Physico-Math. Disq. III.*; dopo sciolto il problema di Bernoulli, avverte pur egli che questo non è il problema che la comune degli Analisti si propone pel censo composto, e si trattiene poi sì a lungo su tal proposito, facendo i più essenziali rilievi, sviluppando ogni cosa minutamente, e tutto dimostrando col massimo

za; convien dimostrarlo. Sì, convien dimostrarlo, e si dimostrerà; e mi darò tutta la premura di sviluppare ogni cosa partitamente, onde poter mirare il tutto nel migliore aspetto possibile, nell' aspetto della verità;



---

rigore, che quasi non dà più campo ad aggiugnere cosa, che pure risguardare si possa come interessante.

Chiunque abbia veduto ciò che ho quì enunciato non può, io credo, avere la minima difficoltà nel riconoscere la diversità dei due problemi; almeno a me sembra impossibile che, dopo la lettura di questi Autori nelle accennate cose, uno possa confonderli in un solo; il che mi fa supporre che il Prof. Lotteri non abbia osservato nè Keill, nè Frisi, nè Fontana, o almeno non li ha osservati che in parte; giacchè non è credibile che un uomo di merito deciso, qual è il Prof. Lotteri potesse inciamparsi in materia tanto sviluppata.

giacchè, sebbene i problemi di cui si parla non possano confondersi in un solo, ma sieno sostanzialmente due diversi, bisogna accordare però che l'intrinseco, per cui sono effettivamente tali, si trova per modo occulto, che non saprebbe manifestarsi se non sotto ad un finissimo esame.

Veduto poi che in realtà il problema degli uni è essenzialmente diverso da quello degli altri; quale sarà quindi l'incluso nei contratti che nella società si fanno? Può essere l'uno, può essere l'altro, e dalle condizioni appunto del contratto apparir dee a quale dei due convenga appigliarsi. Tutto si ridurrà dunque a far sentire in che consista la differenza dei problemi in quistione, ed a far vedere in quale con-

tratto sia uno incluso, ed in quale vi sia l'altro; in una parola a rendere sicura e facile la scelta della formola che all'uno o all'altro contratto convenga. A tanto appunto e niente più sarebbe la cosa ridotta, se riposar si potesse sull'esattezza delle formole medesime. Oh qui in vero sembra che la ragion vacilli! E non si difese già la formola di d'Alembert e degl'innumerevoli Analisti che con lui s'accordarono in tal risultato? Sì. Non è egualmente esatta e sicura la formola del grande Bernoulli, dei celebri Keill, Fontana, e Frisi? Cosa potrò io mai rispondere? Avrò coraggio di porvi anche il minimo dubbio? Ah io dimenticava il mio niente, dimenticava chi sono i Bernoulli, Keill, Fontana, e Frisi! Appoggiato forse su d'una sem-

plice apparenza mi lasciava trasportare ad un falso giudizio; quand' anzi dire mi dovea:

Son io che sogno
E non dormichia Omero.

Ma ...... confesserò poi l' esattezza di quella formola, senza aver potuto io stesso riscontrarla tale? avrò io coraggio di spacciare per esatto ciò che non ho saputo verificare, ed appoggiato soltanto sull' autorità? dimenticherò pure che questa può avere in tutt' altro un peso che non si accorda in Matematica? Quale imbarazzo! Un ribrezzo troppo giusto non mi permette di condannarla; la ragione mi proibisce di ammetterla per esatta, se non me ne sono certificato. Vorrei ..... cerco di convincermene, e non vi riesco; anzi ogni volta che mi met-

to all' esame, che mi vi fermo sopra, mi allontano sempre più .... mi pare di non travedere ..... mi persuado che è ...... inesatta ....... (7). Io sbaglierò, ma avrò piacere che talun si dia la pena d'illuminarmene; e gliene professerò buon grado, se solo l'amor del vero sarà la sua guida, lo scopo suo.



(7) Keill avendo in tal qual modo contorto il primitivo senso del problema proposto da Bernoulli, e datavi un interpretazione sua particolare non può essere cogli altri annoverato.

# ESAME ANALITICO

DI ALCUNI PUNTI CONCERNENTI

*LA*

## DOTTRINA DEGL' INTERESSI

§. 1. Il Prof. Lotteri nella sua Opera sugl' Interessi (*a*) al paragrafo primo distingue l'interesse in tre specie, e sono 1.ª *interesse semplice*, 2.ª *interesse composto interpolato*, 3.ª *interesse composto continuo*.

Un capitale intendesi 1.° impiegato ad *interesse semplice*, allorchè gl' interessi non si



(*a*) Quest' Opera stampata l'anno scorso ( Vedasi la nota 1.ª prefazione ) in Pavia nella stamperia Galeazzi porta il titolo di *Elementi della Dottrina degl' Interessi ec.* Egli sarebbe opportuno averla presente per bene e più facilmente intendere il presente scritto.

desumono che dal puro capitale impiegato primitivamente, nè mai gl' interessi medesimi si fanno passare in aumento del capitale stesso.

2.º S' intende impiegato ad *interesse composto interpolato*, allorchè in fine di ciascun anno il frutto prodotto nel corso di quell' anno stesso, sul piede d' interesse semplice, si fa passare in aumento del capitale per fruttare poi insieme con lui negli anni successivi, come se il capitale stesso diventasse successivamente maggiore al principio d' ogn' anno successivo; ma nel corso di ciascun anno l' interesse non si desume che dal capitale, che a quell' anno compete, e come impiegato ad interesse semplice.

3.º S' intende finalmente impiegato ad *interesse composto continuo*, quando i frutti prodotti in ogni istante si fanno passare in aumento del capitale per farli fruttare insieme con lui, in guisachè il capitale si considera come facentesi successivamente maggiore in ogni istante successivo per l' aggiunta dei frutti medesimi (*b*).

---

(*b*) In ciascuna delle tre indicate specie di censo l' interesse fluisce continuamente, ma in modo

Prescindendo qui da qualunque limite, che in vigor di legge possa essere assegnata a contratti di censo (c), e parlando puramemte da Geometra, credo che nessuno potrà trovar cosa che ragionevolmente dire si possa

diverso dall' una specie all' altra. Nella prima fluisce uniformemente. Nella seconda fluisce uniformemente nella durata di ciascun anno; ma dal termine di ciascun anno all' incominciamento del successivo si fa sempre un salto, che rompe l' uniformità. Nella terza specie poi l' interesse fluisce aumentando di continuo secondo certa regolar legge. Se v' è qualche irregolarità dunque, questa non si trova che nella seconda specie di censo. Tutto però in Matematica dee prendersi in aspetto rigoroso e geometrico, nè v' ha l' una cosa, a mio credere, a cui un tale aspetto competa più che ad altra.

(c) Per la voce *censo*, o *interesse*, od anche *frutto*, cui noi diamo qui lo stesso valore, non altro intendere si dee se non il guadagno che si ricava da una somma di danaro imprestata per un certo tempo. E così per *interesse annuo*, *censo annuo*, o *frutto annuo* non dobbiamo intendere se non se il guadagno che si ricava alla fine di ciascun anno da una somma imprestata. Tale è la diffinizione data comunemente, e data del pari dal Prof. Lotteri al paragr. 1., alla quale io mi propongo di esattamente attenermi.

in contrario alla sovra fatta divisione; tutto dipendendo in sostanza dalla volontà de' contraenti, dalle condizioni stabilite ne' loro accordi. Ma fatto poi un accordo qualunque, ragion vuole che si stia attaccato a puntino alle condizioni del contratto, se non si vuole offendere la giustizia.

§. 2. Il primo e più semplice problema, che si suol proporre sugl' interessi, si è quello, in cui si tratta di trovare a che monti un dato capitale impiegato per un dato tempo qualunque, ed a qualunque interesse. La soluzione data comunemente pel caso dell' interesse semplice non ammette difficoltà di sorte alcuna; sicchè niuna parola a questo proposito (*d*). Quella pel caso dell' interesse composto interpolato è destramente data dal sagace Prof. Mascheroni, e con semplicità ed eleganza ripetuta dal Prof. Lotteri (*e*); nè quindi occorre pure ripeterla nuovamente

(*d*) Può essa però vedersi nella stessa citata Opera del Prof. Lotteri, o in qualunque altro Autore, che non occorre d' indicare.

(*e*) Anche questa può vedersi nell' Opera medesima del Prof. Lotteri, ed anche nella nota I.ª all' Algebra di Bossut, Edizione seconda di Pavia.

in questo luogo. Il solo caso che sembrami meritare delle riflessioni giudiziose e ponderate, si è quello dell' interesse composto continuo. Questo come il più complicato vuol essere sviluppato più minutamente. Essó non fu certo analizzato quanto era necessario. Di ciò possiamo persuaderci, se osserviamo che il Prof. Lotteri ci presenta in tal caso un risultato, che non ci venne presentato da altri.

Incominciamo pertanto dal richiamare la soluzione datane dal Prof. medesimo (*f*), e dietro questa ci instraderemo allo sviluppo, all' analisi di que' punti, che da un opportuno esame ci verranno indicati.

§. 2. Sia dunque $c$ il capitale da impiegarsi, sia $\omega$ l'intereste convenuto dell' unità per un anno, sia $t$ il total tempo dell' impiego; e comunque grande o piccolo, intero o rotto sia questo tempo, suppongasi diviso in un numero infinito $m$ di elementi, o tempetti infinitesimi, o istanti $dt$, $dt$, $dt$, ec. tutti

(*f*) Sebbene l' andamento, che qui teniamo nella soluzione del problema di cui si tratta, sembri un poco diverso da quello seguito dal Prof. Lotteri, non è però in sostanza che il medesimo.

eguali; onde abbiasi $mdt = t$. E per ultimo dicasi $v$ la cercata somma, a cui monta il capital proposto alla fine dell' impiego.

Ciò posto se l'unità frutta $\omega$ in un intero anno, in un solo elemento di tempo $dt$ non frutterà che $\omega dt$; e questo frutto aggiunto all' unità stessa darà $1 + \omega dt$ per somma; il che mostra cosa diventa $1$ in un istante $dt$; il quale istante può essere il primo, o qualunque altro; cioè in ogni istante $dt$ da $1$ si ha sempre $1 + \omega dt$. Ma se da $1$ si ha $1 + \omega dt$, similmente da $1 + \omega dt$ si ha . . $(1 + \omega dt)^2$, e da $(1 + \omega dt)^2$ si ha $(1 + \omega dt)^3$, e da $(1 + \omega dt)^3$ si ha $(1 + \omega dt)^4$, e così sempre. Pertanto si fa manifesto che $1$ va a diventare $1 + \omega dt$ nel primo istante dell' impiego, e che lo stesso $1 + \omega dt$ avuto nel primo istante diventa poi $(1 + \omega dt)^2$ nel secondo, e che questo valore $(1 + \omega dt)^2$ avuto nel secondo istante diventa $(1 + \omega dt)^3$ nell' istante terzo, il quale $(1 + \omega dt)^3$ avuto nel terzo diventa similmente $(1 + \omega dt)^4$ nel quarto; e così seguitando successivamente sino ad esaurire il numero $m$ d'istanti si giugnerà evidentemente ad avere in fine $(1 + \omega dt)^m$, il che indica appunto cosa diventa $1$ in $m$ istanti, ossia nel tempo $t$ dell' impiego,

Ora è chiaro che, se da $1$ si ha . . . $(1+\omega dt)^m$, da $c$ dee aversi $c(1+\omega dt)^m$. E tanto sarà appunto il cercato valore di $v$, cioè si avrà l' equazione

$$v = c(1+\omega dt)^m .$$

Ma questa contenendo il $dt$ infinitesimo, e l' $m$ infinito non si saprebbe applicare alla pratica, se si lasciasse sotto l' attuale forma. Svolto pertanto col canone newtoniamo il binomio $(1+\omega dt)^m$, e moltiplicata in seguito per $c$ la serie che ne risulta, l' equazione stessa si ridurrà alla forma

$$v = c\Big(1 + m\omega dt + \frac{m(m-1)}{2}\omega^2 dt^2 \ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\omega^3 dt^3 \ldots\ldots$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\omega^4 dt^4 + \text{ec.}\Big) \ldots ;$$

ossia a quest' altra

$$v = c\Big(1 + m\omega dt + \frac{m^2\omega^2 dt^2}{2} + \frac{m^3\omega^3 dt^3}{2.3}$$

$+ \dfrac{m^4\omega^4 dt^4}{2.3.4} + \text{ec.}\Big)$, giacchè per essere $m$ infinito, si ha $m = m - 1 = m - 2 = m - 3$ $=$ ec. Quindi colla sostituzione di $t$ in luogo di $mdt$ si avrà

$$v = c\left(1 + \omega t + \frac{\omega^2 t^2}{2} + \frac{\omega^3 t^3}{2.3} \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{\omega^4 t^4}{2.3.4} + \text{ec.}\right).$$ E se si prende un numero $n$ tale che abbia per logaritmo naturale la quantità $\omega t$, onde sia $\omega t = log. n$, si otterrà sostituendo nuovamente

$$v = c\left(1 + log. n + \frac{(log. n)^2}{2} \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{(log. n)^3}{2.3} + \frac{(log. n)^4}{2.3.4} + \text{ec.}\right),$$ e questa per essere

$$1 + log. n + \frac{(log. n)^2}{2} + \frac{(log. n)^3}{2.3} \ldots$$
$$+ \frac{(log. n)^4}{2.3.4} + \text{ec.} = n$$ (g) si ridurrà pure alla semplice espressione

$$v = cn.$$

Indicando ora la base de' logaritmi natutali con $e$, avremo $log. n = \omega t = \omega t\ log. e = log\ e^{\omega t}$, da cui $n = e^{\omega t}$. Dunque sostituendo per ulti-

---

(g) Fra gli altri possono vedersi Bossut Alg. §. 165. De Marie §. 306. Ediz. 1.ª di Firenze, e §. 360. Ediz. 3ª.

mo questo valore di $n$, avremo finalmente

$$v = ce^{\omega t}.$$

Che è quanto si cercava.

Dunque un capitale qualunque $c$ impiegato per un qualunque tempo $t$ ad interesse composto continuo in ragione di $\omega$ per 1 all' anno ascende alla somma espressa da $ce^{\omega t}$; dove le indeterminate non sono che $c, t, \omega$; poichè la $e$ base de' logaritmi naturali per niente dipende dai casi particolari, che posson proporsi, e solo rappresentar può il valor numerico 2,7182818, e non altro.

Passiamo ora a fare qualche applicazione della trovata formola a casi particolari.

§. 4. Tizio riceve 100 mila lire da Sempronio con condizione di restituire, dopo qualsivoglia tempo, capitale ed interesse composto continuo in ragione del 5 per 100 all' anno. Allo spirar dell' anno Tizio vuole pagare Sempronio a norma del contratto. Cosa deve Tizio a Sempronio?

Il capitale è qui 100 mila, dunque $c = 100000$; il tempo è di un anno, dunque $t = 1$; l' interesse è il 5 per 100, ossia $\frac{1}{20}$ per 1 all' anno, dunque $\omega = \frac{1}{20}$. Sostituiti

pertanto questi valori numerici nella trovata formola, si avrà

$$v = 100000 \times 2{,}7182818^{\frac{1}{20}},$$

e prendendo i logaritmi tavolari avremo
$log.\, v = log.\ 100000 + \frac{1}{20}.\ log.\ 2{,}7182818 = 5 + \frac{1}{20} \times 0{,}4342945 = 5 + 0{,}0217197 = 5{,}0217197 = log.\ 105128{,}3$;
Dunque passando nuovamente dai logaritmi ai numeri, si avrà

$$v = 105128{,}3.$$

E tanto pretende Sempronio che sia il debito di Tizio in capo all' anno.

Tizio che poco conosce le Matematiche, ma che altronde sa ragionare, niente intendendo il calcolo fatto, non sa nè vuole persuadersi che l' indicata somma pretesa da Sempronio formi il suo debito se prima non riconosce egli pure essere questo di tale grandezza. Si mette pertanto a riflettere sull' accordo, e dice: qualunque sia la specie di censo, che io abbia contrattato, esso è però in ragione del 5 per 100 all' anno; il capitale che io ho ricevuto è appunto 100 mila lire; il tempo per cui io l' ho tenuto presso di me è precisamente un anno; dunque per dare il 5 per 100 all' anno non devo dare

che 5 mila lire; e quindi il totale mio debito non può essere che di 105 mila lire, e non 105 mila più 128,3. Ma vedendo che Sempronio non ne conviene per niente, a lui rivolto si fa a dire: o è il 5 per 100 che voi volete, o non lo è; se è il 5, voi lo avete nella somma 105 mila che io vi esibisco; e se pretendete 105 mila più 128,3, allora non sarà più il 5 per 100 secondo l'accordo, ma sarebbe il 5.1283 per 100; e qui non v' ha replica. Sempronio però appoggiato alla sua formola matematica, formola infallibile insiste e giura essere 105128,3 il suo credito, e che niuna ragione mai varrà a distruggere ciò che è infallibile per se. Con ciò l'uno non può persuadere l'altro, e uopo è portarsi per tal quistione al giudizio, alla decisione di altre persone non interessate, di persone di mente fredda.

§. 5. Io per altro crederei che qualche cosa dir si potrebbe in favore di Tizio, e dimanderei in ispecie: cosa deve intendersi per l'espressione *in ragione del 5 per* 100 *all' anno*? e pare mi senta per ogni intorno suonare all' orecchio che altro non può, non deve intendersi se non che da ogni 100 di capitale devono aversi 5 di frutto nel termi-

ne di un anno, comunque questo si formi, o dal solo capitale, o dal capitale ed interessi stessi. Vale a dire che l'aggregato di tutti gl' istantanei frutti provenienti, o dal solo capitale se il censo è semplice, o dal capitale e frutti stessi se il censo è composto, deve giugnere nel termine di un anno alla somma precisamente di 5 tante volte, quante sono le centinaja componenti il capitale. E qual mai altra cosa potrebbe significare? Se si chiama *interesse annuo* ciò che si ricava alla fine di ciascun anno da una somma imprestata ( Vedi nota *c* ), essendo l'interesse annuo il 5 per 100, mi par chiaro che da ogni 100 debba ricavarsi 5 e non altro. Non crederei poi che si potesse far distinzione tra il dire l'*interesse è in ragione del 5 per* 100 *all' anno*, e 'l dire *l'annuo interesse* di 100 è 5; o che si pretendesse che nell' annuo interesse non debbano computarsi gl' interessi degl' interessi. Io almeno intendo la cosa così, e posso ingenuamente asserire di non aver nemmeno mai pensato che si potesse intenderla altrimenti; nè mai ho potuto capire che diversamente da me la intendessero tutti quanti ho saputo interrogare; e neppure voglio supporre che il Prof. Lotteri la pren-

desse in un modo che io ed altri non abbiamo immaginato.

Se così fosse, Tizio avrebbe ragione. Ma e la formola di Sempronio? La formola di Sempronio parrebbe viziosa. Prima però di precipitare una decisione non sarà male assoggettarla ad altro sperimento.

§. 6. Richiamiamo pertanto l'enunciato del problema, di cui trattiamo, quale dallo stesso Prof. Lotteri (paragr. 6 della sua Opera) viene esposto. Eccone i suoi precisi termini:

*Supposto che la somma* 1 *in fine d'un anno diventi* $1 + \omega$, *si vuol sapere cosa diventi un' altra somma* c *dopo un tempo qualunque* t *espresso in parti dell' anno* (h), *avuto riguardo alle tre specie di censo*.

In questo enunciato la grandezza del capitale $c$ non è punto determinata nè limitata, onde faccio $c = 1$; il tempo $t$ può parimenti essere qualunque, perciò lo prendo di un anno, sicchè anche $t = 1$; faccio pure $= 1$ anche $\omega$, cioè prendo l'interesse in ragione



(h) Le parole *in parti dell' anno* non escludono che $t \rightleftharpoons 1$, e sia pure comunque maggiore o minore di 1. Vedansi perciò i corollarj che l'Autor medesimo presenta dopo l'indicato problema.

del 1 per 1, ossia del 100 per 100 all' anno? Con tali dati l'enunciato medesimo del problema si ridurrà a quest' altro:

*Supposto che la somma 1 in fine di un anno diventi 2, si vuol sapere cosa diventi 1 dopo parimenti un anno, avuto riguardo alle tre specie di censo.*

Qui non riguardiamo noi che la terza specie di censo, vale a dire il censo composto continuo; pel che la formola da usarsi si è $v = c\,e^{\omega t}$. Sostituito pertanto 1 in luogo di $c$, di $\omega$, di $t$, e 2,7182818 in luogo di $e$, si avrà

$$v = 1 \times 2{,}7182818^{1 \times 1} = 2{,}7182818$$

ossia prossimamente

$$v = 2\tfrac{7}{10};$$

e tanto indica la formola dovere diventare 1 in un anno, nell' ipotesi che 1 in un anno diventi 2. Ma non è ciò una contraddizione manifesta? Se 1 diventa 2, non diventa certamente $2\tfrac{7}{10}$! Chi sa rispondere a questo? Per me certo non so dire se non che: o la formola è falsa, o non è bene applicata; e per precisare se falsa o male applicata, credo non richiedersi altro che di sapere se in $\omega$ comprendonsi, o no gl' interessi degl' interessi. Se, parlando sempre d'interesse composto continuo, si comprendono in $\omega$ inte-

ressi d'interessi, la formola è assolutamente falsa; se nell' ipotesi stessa non vi sono in $\omega$ che gl' interessi semplici, allora la formola sarà male applicata, ed ogni cosa malamente espressa. La falsità della formola nel primo caso mi pare manifesta dal non rappresentare essa il valore dimandato dal problema. Che la formola medesima non abbia a che fare col problema in quistione nel secondo caso, andiamo a vederlo.

§. 7. Tutti gli Autori, che sciolto hanno il problema di trovare il montante di un capitale qualunque impiegato ad interesse composto, dicendo: *se* 1 *diventa* $1 + \omega$ *nel prim' anno*, $1 + \omega$ *diventa* $(1 + \omega)^2$ *nel secondo* ec. hanno tutti d'accordo considerato che in $\omega$ si contenessero anche gl' interessi degl' interessi. Un tal fatto è troppo manifesto perchè si abbia a mettere in dubbio. D' Alembert in ispecie e Fontana, allorchè dimostrarono che il censo composto è vantaggioso al debitore avanti al compimento dell' anno (*i*) lo fecero troppo chiaramente



(*i*) D' Alembert nell' Encicl. Art. Intérêt., e Fontana nel Prodromo dell' Encicl. Ital. Art. Anatocismo.

intendere. E chi avesse presa la cosa diversamente avrebbe in vero traviato dal prescritto nel problema. Poichè se in $\omega$ non si contenessero anche gl' interessi degl' interessi, in allora l' $s$ non diventerebbe solo $1 + \omega$, ma $1 + \omega +$ gl' interessi degl' interessi contro l' ipotesi. Cioè si sarebbe in contraddizione (*k*).

(*k*) Anche lo stesso Prof. Mascheroni, che dal Prof. Lotteri al paragr. 14. del suo libro viene citato per garante de' suoi principj, mi pare faccia intendere chiaramente, nella nota 1.ª all' Alg. di Bossut Ediz. 2.ª di Pavia, che trattandosi di censo composto continuo devono pure comprendersi in $\omega$ gli interessi degl' interessi. Ecco le sue precise parole: *Si potrebbe però fare un contratto secondo le condizioni della formola dell' Autore. Allora chi impresta il danaro s' intenderebbe di volere che il frutto del danaro che matura ogni momento indivisibile di tempo passasse subito in capitale fruttante con una proporzione tale che in vigore di essa a capo di un anno la quantità* m *fosse diventata* $m + 1$.

La formola qui indicata dal Prof. Mascheroni coincide sostanzialmente con quella, che d' Alembert, e la comune degli Analisti danno pel censo composto continuo, comunque sembrar possa esservi qualche apparenza di diversità. Tutta la differen-

L'ipotesi comune è dunque, e deve necessariamente essere quella di contenersi in $\omega$ anche gl' interessi degl' interessi. Se tale ipotesi, ripeto, è mantenuta nel rintraeciare la formola $v = ce^{\omega t}$, convien dire che questa sia viziosa per altro verso, dando de' risultati falsi. Se poi non è mantenuta siamo evidentemente giù di strada.

§. 8. In ogni modo adunque non tengono ad un sodo appoggio le accuse portate alla formola comune degli Analisti, agli Analisti



---

za in fatti si riduce al prendersi nell' una l' unità per frutto di $m$, dove nell' altra si prende $\omega$ per frutto dell' unità; quali due frutti però $1$ ed $\omega$ essendo proporzionali ai capitali $m$ ed $1$, da cui sono prodotti, mostrano evidentemente che l' una formola coincide sostanzialmente coll' altra.

Dunque Mascheroni intende che nel censo composto continuo la quantità $m$ per l' aumento degli interessi, ed interessi d' interessi dee diventare $m+1$ e niente più in capo all' anno, ossia che la quantità $1$ dee diventare $1+\omega$ e niente più. Dunque in $\omega$, anche secondo Mascheroni, vi si contengono interessi, ed interessi d' interessi. Ciò si rileva in ispecie dalle parole *capitale fruttante con una proporzione tale ec.*

stessi, ed in particolare a d'Alembert (*l*). Perchè queste accuse fossero ragionevoli bisognava essere d'accordo co' medesimi Analisti nelle ipotesi, e discordi solo ne' *risultati*, e che inoltre si fosse riconosciuto per giusto quello dell'accusatore, per falso quello degli accusati. Sarebbe un errore troppo madornale in logica il pretendere di giugnere ad un medesimo risultato con ipotesi diverse. Una tesi si lega con un'ipotesi, e non può legarsi con altre. E si peccherebbe egualmente in Logica pretendendo che un risultato fosse falso, solo perchè è diverso da un altro. La falsità dell'uno è rettamente desunta dall'esattezza riconosciuta dell'altro, non dalla sola diversità.

Nel nostro caso però mi pare che non possa aver dato luogo alle apportate accuse se non la sola diversità de' due risultati, la quale soltanto era decisamente conosciuta, e non altro: e se v'è qualche cosa di più, per me confesso candidamente di non avere saputo rinvenirla. Ma comunque sia, io credo non

---

(*l*) Vedasi il paragr. 14 della citata Opera del Prof. Lotteri.

si possa dire in risultanza se non che: o nell' apportarle si fu male appoggiato, perche appoggiato ad una formola falsa, o si è sragionato, perchè la formola che presentava gli argomenti di accuse non aveva a che fare coll' ipotesi degli accusati, e voluta dal problema (*m*).

---

(*m*) Il Prof. Lotteri nel Paragr. 14 già citato della sua Opera dice essere *assolutamente erroneo* quanto ha preteso di dimostrare il d' Alembert, cioè *che l' interesse composto continuo sia svantaggioso al creditore innanzi al compimento di un anno, identico coll' interesse semplice in capo all' anno, indi vantaggioso al di là del primo anno dell' impiego*. Erroneo perchè, secondo lui, il credito al compimento dell' anno non può essere $c(1+\omega)$, ma esser dee $ce^{\omega}$. Egli stesso però suppone al paragr. 6 del suo libro che 1 in fine di un anno diventi $1+\omega$; ed essendo evidente che quanto si dice di una unità dee parimenti intendersi di un' altra qualunque, ossia di ciascuna unità del capitale, è chiaro che se una unità diventa in capo all' anno $1+\omega$, un numero $c$ di unità diventerà pure in capo all' anno $c$ volte $1+\omega$, cioè il capitale $c$ diventerà in un anno $c(1+\omega)$. Dunque d' Alembert pare non dica falso; e se non è falso questo, dee necessariamente essere falso che nel tempo stesso $c$ diventi $ce^{\omega}$.

Io son ben lungi dal sospettare che si sia preteso che ipotesi sostanzialmente diverse

---

A me non basta il dire che $c(1+\omega)$ non può essere il credito al compimento dell' anno, perchè lo dee essere $ce^{\omega}$; nè ciò bastar dee ad ogni persona ragionevole; e ripeterò cento volte: se $c(1+\omega)$ non può essere il credito al compimento dell' anno, dov' è che si commette l' errore, in che esso consiste?

Il paralogismo (prosiegue il Lotteri) di questo altronde sommo Geometra (cioè d' Alembert), e della comune degli Scrittori consiste in ciò che si assume l' equazione $v=c(1+\omega)^n$ come generale per qualunque valore di $n$; e Mascheroni ha avvisato gli Analisti che una tale equazione non regge che nel caso di $n$ intero. In fatti (è sempre il Lotteri che parla) l' equazione $v=c(1+\omega)^n$ non si ottiene che per induzione, facendo successivamente $n=1, 2, 3$, ec.

Da questa asserzione del Lotteri par chiaro ch' egli pure ritenga l' equazione $v=c(1+\omega)^n$ per buona ne' casi di $n$ intero. Dunque facendo $n=1$ si avrà $v=c(1+\omega)$; dunque falso che sia $v=ce^{\omega}$. Inoltre anche gli esempj da noi dati §. 4 e §. 6 competono ad $n$ intero, cioè $n=1$; dunque pel primo si avrà $v=100000(1+\frac{1}{20})=105000$, secondo sostiene Tizio; e pel secondo $v=(1+1)=2$, senza alcuna contraddizione. Dunque, se l' equazio-

portar dovessero a' risultati identici; una mancanza sì vergognosa di raziocinio non è sup-

---

ne $v = c(1 + \omega)^n$ dà valori esatti, saranno falsi i presentati dall' equazione $v = c e^{\omega t}$, che sono diversi. Dunque falso che l'equazione stessa $v = c e^{\omega t}$ non inchiuda nessuna difficoltà o contraddizione ne' risultati, come asserisce il Lotteri in fine del citato paragr. 14.

Il Prof. Mascheroni poi dicendo che l'equazione $v = c(1 + \omega)^n$ (Vedasi la nota I.a all' Alg. di Bossut Ediz. 2.a di Pavia) vale solo pei casi di $n$ eguale ad un numero intero, non parla che dei contratti fatti secondo lui nella volgare maniera d'intendere, vale a dire nei contratti di censo composto interpolato, ma asserisce in seguito (Vedasi la nota $k$) che possono farsi de' contratti in cui la formola dell' Autore, ossia la formola $v = c(1 + \omega)^n$ valga generalmente; e questi sono quelli spettanti al censo composto continuo. Dunque anche Mascheroni consente che pel censo composto continuo valga la formola $v = c(1 + \omega)^n$; e se vale questa, non può valere certamente l'altra $v = c e^{\omega t}$.

Nello stesso par. 14 asserisce pure il Lotteri che molte altre formole dell' Algebra sono soggette alla medesima restrizione, di non valere cioè, che pei casi di $n$ intero; ed adduce per esempio l'equazione $u = a q^{n-1}$, dove $u$ rappresenta l'ultimo

ponibile in persone, il cui merito è troppo vantaggiosamente conosciuto, ed amo meglio

---

termine di una progressione geometrica, $a$ il primo, $q$ la ragione, ed $n$ il numero de' termini, la quale equazione secondo lui dà talora valori illusori per $n$; e ciò ogni volta che $n$ viene rappresentato da un numero che non è intero, contro la natura dell' $n$ medesimo.

Se ciò fosse l' Algebra non sarebbe più uno stromento esatto, come ognuno accorda esserlo. Può questo però essere malamente adoperato, ed allora possono ottenersi valori non veri. Ma se l' Algebra insegna che da $u = a q^{n-1}$ si deduce $n = 1 + \frac{log.\, u - log.\, a}{log.\, q.}$, sempre indicherà . . . $1 + \frac{log.\, u - log\, a}{log.\, q}$ il vero valore di $n$; ed $n$ risulterà sempre intero, ogni volta che $a$ ed $u$ potranno essere veri termini di una progressione geometrica. Riflettendo però che $a$ ed $u$ sono legati tra loro mediante la quantità $q$, e che per conseguenza non tutti i valori numerici sono suscettibili di dare una relazione compatibile tra $a$, $u$, e $q$, nessuna meraviglia che abbiasi tal volta per $n$ un numero che non è intero.

Così ogni volta che sarà determinato il valore di $a$ e di $q$; determinata sarà pure la grandezza di ciascun termine della progressione, e per con-

pensare che una svista può incorrersi da chi-
chesia.

Un giudizioso e minuto esame però su ciascun passo mi lusingo potrà valere a scoprirci la causa, per cui la trovata formola

seguenza $u$ non sarà suscettibile che dell' una o l'altra delle grandezze competenti ai termini medesimi. Quindi si troverà per $n$ un numero intero semprechè si sostituisca ad $u$ una delle mentovate grandezze; ma qualora si dia ad $u$ un valore intermedio a due grandezze competenti a due termini consecutivi, è evidente che allora $n$ non dee risultare intero, altrimenti indicherebbe esistere nella progressione, a cui appartiene, que' termini che realmente non esistono, o meglio indicherebbe esistere la grandezza sostituita per $u$ in quel luogo dove non esiste di fatti.

Dunque sarebbe anzi inesatta la formola stessa qualora in quest' ultimo caso desse un numero intero. E presentando per $n$ un numero frazionario, cioè un intero unito ad una frazione propria significherà che oltre ad un numero di termini completi corrispondenti all' enunciato intero, vi è pure parte d'un altro, o per dir meglio un intermedio tra l'ultimo de' detti completi, ed il loro consecutivo, il cui luogo viene precisamente indicato dalla nominata frazione propria.

Ciò che si è detto di $u$, dati essendo $a$, e $q$, dire si dee di $a$, dati che siano $u$ e $q$.

$ce^{\omega t}$ non convenga al problema del caso, e per cui riesca d'insussistente appoggio alle portate accuse: del che non siamo avvertiti fin' ora che dal puro fatto. Ripigliamo pertanto da capo ogni cosa, affinchè niente ci sfuga, e niente si ammetta che non sia ben ponderato e digerito.

§ 9. Si vuol sapere dunque cosa diventi una somma qualunque $c$ impiegata a censo composto continuo per un numero di anni $t$ qualunque intero o rotto, supposto che $1$ diventi $1+\omega$ in capo ad un anno.

Trattandosi di censo composto continuo non può negarsi, che il discorso tenuto ordinariamente nel rintracciare la formola rappresentatrice del cercato montante, non dia luogo a qualche sospetto, almeno rapporto alla generalità che essa aver dee in riguardo al tempo. Poichè il problema prescrive che, non il frutto prodotto in ciascun anno, ma quello prodotto in ogni istante passar debba immediatamente in aumento del capitale per fruttare con esso lui del pari, se ci accontentiamo di veder solo cosa l'unità vada a diventare successivamente da anno in anno, come quando si dice se $1$ nel prim' anno diventa $1+\omega$, $1+\omega$ diventerà $(1+\omega)^2$ nel

secondo ec., sembra in vero commettersi una specie di deviazione da ciò che è prescritto, o se non altro la prescrizione stessa pare non sia per intero esaurita; e che così saltando, si lasci pel corso di ciascun anno un vuoto che può far ragionevolmente temere qualche alterazione nel risultato, o per lo meno che questo valere non possa che pei casi, in cui il numero degli anni di censo sia intero, e manchi così di quella generalità, ch' è pur necessaria, perchè si abbia ad avere la soluzione per completa.

Se però si applicherà a ciascun istante successivo il discorso medesimo, che la comune degli Analisti tener suole saltando da anno in anno, è chiaro che non vi potrà più rimanere a che dire in contrario, nè aver luogo dubbio alcuno, che la formola risultante patir possa qualche eccezione. Ma per applicare ai singoli istanti il discorso, che far si suole saltando da anno in anno, l'enunciato del problema non presenta il dato che presenta appunto per saltare da anno in anno. E' prescritto nel problema che l'unità in un anno diventar debba $1 + \omega$; ma non è ugualmente detto cosa debba aversi in un istante . . .

Sebbene per altro non sia detto cosa l'unità fruttar possa in un solo istante, è però chiaro che tra il frutto istantaneo dell' unità, e 'l frutto $\omega$ passar deve certa relazione. Ma quale poi questa siasi non è egualmente manifesto. Cerchiamo pertanto di scoprirla mediante lo sviluppo di ciò che incluso si trova nel senso del problema; e poichè in essa evvi riposto il primo fondamento di quanto il problema stesso dimanda, conviene nel rintracciarla usare tutta l'avvertenza possibile, affine di non cadere in inganno. Niente perciò ammetteremo che non sia di una evidenza perfetta.

§. 10. Senso adunque del problema è che il capitale impiegato, ossia ciascuna delle sue unità debba in ogni istante produrre il suo frutto, e questo pure in ogni istante successivo debba parimenti produrre il suo, il quale istessamente in ogni istante che viene in seguito debba in egual modo produrre il suo, e così sempre. Dunque l'unità viene aumentata da' suoi frutti, dai frutti di questi, e da quelli di questi ancora ec. ec. Ma prescrivendo lo stesso problema che l'unità debba in capo all' anno diventare $1 + \omega$ e niente più, l'aumento dell' unità in un anno

essere non può che ω. Dunque ω rappresenta l'aggregato di tutti i frutti istantanei prodotti in un anno e dall'unità immediatamente, e da' suoi frutti, e da' frutti di frutti, ec. ec.

Il frutto istantaneo dell'unità dee dunque essere tale che aggregandosi, non solo a se stesso tante volte quanti sonovi istanti nell'anno, ma ben anche ai frutti provenienti dai frutti stessi, ed a quelli provenienti da questi altri, e così sempre, giunga appunto in un anno a formare una somma rappresentata da ω.

Ecco quindi la relazione che passa tra l'istantaneo frutto dell'unità, ed il di lei frutto ω prodotto in un anno intero.

§ 11. Pertanto comunque grande o piccola essere si debba la grandezza di questo istantaneo frutto dell'unità, datavi una denominazione, da cui si dedurranno pure le espressioni dei successivi frutti di frutti, seguiremo la traccia, con cui negl'istanti successivi vanno producendosi e frutti, e frutti di frutti, e ec., e riconosciuta quindi la legge, con cui essi si succedono da istante in istante, non ci rimarrà che ad aggregare tutto quanto produrre si dee in un anno inte-

ro, onde avere una somma che uguagliata ad $\omega$ fornirà appunto l'espressione della relazione di cui parliamo.

Qualunque siasi dunque la grandezza del frutto che l'unità produce in un istante, dicasi esso $r$; ed è chiaro che se $1$ in un istante frutta $r$, del pari $r$ frutterà in egual tempo $r^2$, ed $r^2$ frutterà $r^3$, ed $r^3$ frutterà $r^4$, e così successivamente senza fine.

Ciò posto 1.° nel primo istante non essendovi a fruttare che $1$, è chiaro che il frutto del primo istante non è che $r$.

2.° Aggiunto questo frutto $r$ all' $1$, si avrà $1 + r$ per ciò che fruttar dee nell'istante secondo. E quindi il frutto del secondo istante sarà evidentemente $r + r^2$.

3.° Aggiunto pure al capitale $1 + r$ del secondo istante il frutto $r + r^2$ prodotto nell' istante stesso, si avrà a fruttare nel terzo istante la quantità $1 + 2r + r^2$. Dunque il frutto del terzo istante sarà $r + 2r^2 + r^3$.

4.° Aggiunto in egual modo il frutto $r + 2r^2 + r^3$ del terzo istante al capitale $1 + 2r + r^2$ dell' istante stesso, si avrà per capitale nel quarto istante $1 + 3r + 3r^2 + r^3$. E 'l frutto quindi del quarto istante sarà $r + 3r^2 + 3r^3 + r^4$.

5.° Aggiunto istessamente al capitale $1 + 3r + 3r^2 + r^3$ del quarto istante il frutto $r + 3r^2 + 3r^3 + r^4$ prodotto nell' istante stesso, si avrà per l'istante quinto il capitale $1 + 4r + 6r^2 + 4r^3 + r^4$. Frutto dunque pel quinto istante sarà $r + 4r^2 + 6r^3 + 4r^4 + r^5$.

6.° Del pari il capitale pel sesto istante sarà $1 + 5r + 10r^2 + 10r^3 + 5r^4 + r^5$, ed il frutto in esso prodotto $r + 5r^2 + 10r^3 + 10r^4 + 5r^5 + r^6$. E così successivamente. Vedasi per maggiore intelligenza il quadro qui dietro.

| *Capitali per gl' istanti successivi.* | *Frutti corrispondenti agl' istanti medesimi.* |
|---|---|
| Pel 1.º $1$ . . . . . . . . . . . . . | $r$ |
| pel 2.º $1 + r$ . . . . . . . . . . . | $r + r^2$ |
| pel 3.º $1 + 2r + r^2$ . . . . . . . . . | $r + 2r^2 + r^3$ |
| pel 4.º $1 + 3r + 3r^2 + r^3$ . . . . . . . | $r + 3r^2 + 3r^3 + r^4$ |
| pel 5.º $1 + 4r + 6r^2 + 4r^3 + r^4$ . . . . | $r + 4r^2 + 6r^3 + 4r^2 + r^5$ |
| pel 6.º $1 + 5r + 10r^2 + 10r^3 + 5r^4 + r^5$ . . | $r + 5r^2 + 10r^3 + 10r^4 + 5r^5 + r^6$ |
| pel 7.º $1 + 6r + 15r^2 + 20r^3 + 15r^4 + 6r^5 + r^6$ . | $r + 6r^2 + 15r^3 + 20r^4 + 15r^5 + 6r^6 + r^7$ |
| cc. | cc. |

I frutti dunque per gl' istanti successivi sono $r, r+r^2, r+2r^2+r^3, r+3r^2+3r^3+r^4, r+4r^2+6r^3+4r^4+r^5, r+5r^2+10r^3+10r^4+5r^5+r^6$, ec. ec. ec., ossia $r, r(1+r), r(1+r)^2, r(1+r)^3, r(1+r)^4, (1+r)^5$, ec., i quali formano una serie, la cui legge è più che semplice e manifesta, onde saperla continuare sin là dove può piacere, e sommarla ancora.

Indichi pertanto $m$ il numero infinito degl' istanti compresi in un anno compito ($n$), ed è evidente che il frutto prodotto nell' istante m$^{esimo}$, cioè nell' ultimo istante dell' anno, sarà $r(1+r)^{m-1}$. Così si avrà la somma di tutti i frutti prodotti in un anno intero espressa da

$$r+r(1+r)+r(1+r)^2+r(1+r)^3+r(1+r)^4+\ldots\ldots+r(1+r)^{m-1}$$
$$=\frac{r(1+r)^{m-1}\times(1+r)-r}{(1+r)-1} \quad (o) \ldots ;$$
$$=(1+r)^m-1,$$ espressione il cui valore non è che $\omega$, come abbiamo già detto.



($n$) Bisogna avvertire di non confondere il valore qui dato ad $m$ con quello che vi si diede al §. 3.

($o$) Vedasi Bossut Algebra §. 150.

Si ha dunque $(1+r)^m - 1 = \omega$ per equazione esprimente la cercata relazione tra il frutto istantaneo dell' unità, ed il di lei frutto $\omega$ prodotto in un anno ($p$).

§. 12. Che se occorre anche d'avere la precisa grandezza o valore competente ad $r$, dall' equazione stessa sarà subito determinato. Trasportando perciò l' 1, si avrà . . . $(1+r)^m = 1+\omega$; ed estraendo la radice

---

($p$) Allo stesso risultato giugnere si potea in altro modo più elegante e semplice del qui tenuto; ma pensando io che in un' analisi più spiegata ed estesa avere si potesse maggior luce per lo scopo qui prefisso di ben distinguere il vero valore del frutto istantaneo dell' unità, rinunciai d' attenermi al metodo più semplice, e mi appigliai al più prolisso. In ciò ho avuto pure di mira che non venisse confusa la ricerca di determinare il valore del frutto istantaneo dell' unità con quella di determinare il montante dimandato dal problema proposto, come avrebbe forse potuto succedere, qualora non si fosse staccata l'una operazione dall' altra con calcoli separati e diversi, e tutto in vece fatto si fosse ad un tempo stesso e col calcolo medesimo.

In seguito però non mancherò di accennare pure ciò che ora si è tenuto soppresso.

$m^{esima}$, ne verrà $1 + r = (1 + \omega)^{\frac{1}{m}}$;
e di quì in fine

$$r = (1 + \omega)^{\frac{1}{m}} - 1.$$

§. 13. E se pure si voglia il valore di $r$ rappresentato sott' altra forma più espressiva, non vi vorrà molto per riuscirvi.

Sviluppo pertanto il binomio $(1 + \omega)^{\frac{1}{m}}$ in serie, ed ottengo . . . . . . . . .

$$r = 1 + \frac{1}{m}\omega + \frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{2}\omega^2 + \ldots$$

$$\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)}{2 \cdot 3}\omega^3 + \ldots$$

$$\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\left(\frac{1}{m} - 3\right)}{2 \cdot 3 \cdot 4}\omega^4 + \text{ec.} - 1;$$

ossia

$$r = \frac{1}{m}\left[\omega + \frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)}{2}\omega^2 + \ldots\right.$$

$$\frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)}{2 \cdot 3}\omega^3 + \ldots$$

$$\left.\frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\left(\frac{1}{m} - 3\right)}{2 \cdot 3 \cdot 4}\omega^4 + \text{ec.}\right];$$

e poichè, essendo $m$ infinito, e perciò $\frac{1}{m}$ infinitesimo, i fattori $\frac{1}{m} - 1$, $\frac{1}{m} - 2$, $\frac{1}{m} - 3$,

ec. si riducono a $-1, -2, -3$, ec.; si avrà egualmente

$$r = \frac{1}{m}\left(\omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + \text{ec.}\right);$$

cioè

$$r = \frac{1}{m}\,log.(1+\omega)\ (q)$$

Il che ci mostra che il frutto istantaneo $r$ dell' unità non dee essere che la m^esima^ parte, del logaritmo naturale della quantità $1+\omega$.

Determinato così l'istantaneo frutto dell' unità, la soluzione del problema non ammette più alcuna specie di difficoltà, nè richiede grande operazione per essere completata, in modo che soggetta non sia ad eccezione alcuna. Ma facciamo qui un poco di digressione.

§. 14. L'istantaneo frutto dell' unità dee dunque essere rappresentato da $\frac{1}{m} log\,(1+\omega)$; ma se lo è da $\frac{1}{m} log\,(1+\omega)$, non può esserlo

---

(q) Vedasi il Bossut Alg. §. 163 Ediz. 2.ª di Pavia, ovvero il De Marie §§. 354, e 355 Ediz. 3.ª Fir.^na^. Avvertasi che la posizione $log.(1+\omega) = \omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} +$ ec. non può competere che ai logaritmi così detti naturali; e di questi ognor intenderemo parlare, quando ci occorrerà far uso di logaritmi.

da $\omega dt$ §. 3., ossia da $\frac{1}{m}\omega$ (r). Altro è $\omega$; altro $log.(1+\omega) = \omega - \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{3} - \frac{\omega^4}{4} + ec.$ S' incomincia dunque ad avere una discordanza ne' principj, sen· ·ttare quella de' risultati; e così forse · ·sta ripeter pure si dee quella che passa tra la formola trovata comunemente, e la trovata di sopra $ce^{\omega t}$. Dico forse, giacchè veduto ancor non abbiamo se il risultato comune sia quello stesso, a cui portar ci dee l' espressione $\frac{1}{m} log.(1+\omega)$.

§. 15. L' andamento però, che tenuto abbiamo nel determinare $\frac{1}{m} log.(1+\omega)$ per frutto istantaneo dell' unità, sembrami che non si possa dire mancante per alcun verso. Vediamo ora se l' espressione $\omega dt$ sostiene egualmente un' esame.

Osservo pertanto che $\omega dt$, ossia $\frac{1}{m}\omega$ rappresenta precisamente la parte m$^{esima}$ del frutto annuo dell' unità, cioè $\omega dt$, ossia $\frac{1}{m}\omega$ è una parte dell' annuo frutto proporzionale al tempo decorso. Tale proporzionalità compete pure all' interesse semplice, cioè quando si tratta d' interesse semplice il frutto istan-

---

(r) $dt$ indica un istante, come pure $\frac{1}{m}$; onde $dt = \frac{1}{m}$.

taneo dell' unità sarebbe del pari $\omega dt$. Forse che nel primo istante dell' impiego debba aversi lo stesso frutto nei due casi, d' interesse semplice, e d' interesse composto continuo? Perchè ciò fosse converrebbe che, trattandosi d' interesse composto continuo, oltre alle condizioni di dovere immediatamente passare in aumento del capitale i frutti prodotti in ogni istante per fruttare con esso lui del pari, e di dovere l' unità diventare $1+\omega$ in capo all' anno, vi fosse pure quella di doversi produrre nel primo istante dell' impiego lo stesso frutto, che prodotto verrebbe quando l' interesse fosse semplice; ma quest' ultima condizione nell' enunciato del problema non si trova espressa, nè in vero vi' può essere. Ella è di fatti contraddittoria coll' altra di dovere l' unità diventare $1+\omega$ in capo all' anno. Quando per frutto istantaneo dell' unità si prendesse $\omega dt$, perchè l' unità diventasse $1+\omega$ in capo all' anno, non occorrerebbero più i frutti dei frutti, basterebbero i frutti semplici. Il problema dunque non sarebbe più quello dell' interesse composto. E quando, ritenuto $\omega dt$ per frutto istantaneo dell' unità, si prendessero oltre ai frutti semplici anche i frutti di frutti, l' unità

diventerebbe in capo all' anno non solo $1+\omega$, come è prescritto, ma qualche cosa di più. E nuovamente sciolto non si sarebbe il problema proposto. In sostanza limitazione dell' aumento dell' unità alla grandezza del di lei frutto annuo, e frutto istantaneo che abbia col frutto annuo la stessa ragione che l' istante ha coll' anno intero, sono pel censo composto continuo cose incompatibili.

§. 16. Malgrado ciò, il Prof. Lotteri ha inteso, se non erro, che nel primo istante d' impiego debba aversi lo stesso frutto per l' interesse composto continuo che si avrebbe appunto per l' interesse semplice. Nella citata sua Opera al paragr. 5. dove parla d' interesse composto continuo, asserisce che appunto nel primo istante dell' impiego il capital primitivo resta impiegato ad interesse semplice, e produce un frutto infinitamente piccolo e proporzionale all' interesse annuo; cioè, intendo io, che abbia col frutto annuo la stessa ragione che ha l' istante coll' anno intero. Al par. 11. poi, sciogliendo il problema stesso, presenta il montante pel primo istante richiamandolo pure dalla formola del par. 8, stabilita per l' interesse semplice. Volendo anche accordare che nel primo istante il frut-

to non provenga che dal puro capitale impiegato primitivamente, e che perciò non sia per tal tempo che interesse semplice; questo però non può essere in ragione di ω per 1 all' anno; ma appartener dee ad altra ragione più piccola, affine di avere ω non solo dagl' interessi semplici che con tal ragione si deducono dall' unità, ma ben anche dagl' interessi degl' interessi. Sviluppiamo la cosa più minutamente.

§. 17. Allorchè l' interesse è semplice il frutto istantaneo è sempre uguale, cioè in ogni istante di egual durata si produce sempre un frutto di egual grandezza. Ma se l' interesse è composto continuo, negl' istanti successivi ed egualmente lunghi si producono frutti, che sono successivamente maggiori. Onde è chiaro che per avere dall' aggregato degl' infiniti frutti prodotti in un anno una data quantità, per es. ω, conviene che il primo istantaneo frutto pel secondo caso sia più piccolo del corrispondente del caso primo. Per maggior chiarezza, sieno rappresentati da $r, r', r'', r''', r''''$, ec. i successivi frutti istantanei, che competono all' interesse composto; e da $s, s, s, s, s$, ec. quelli che spettano all' interesse semplice. Essendo i termini della prima

serie successivamente maggiori, e quelli della seconda tutti dell' uguale grandezza, ed inoltre il numero de' termini dell' una, lo stesso che quello dell' altra, è chiaro che per avere la stessa somma, sì dall' una che dall' altra, è necessario che nella prima vi sieno de' termini maggiori e degli altri minori dei corrispondenti della seconda; ma i minori sono al principio, dunque $r < s$. Così minore di $\omega dt$ conviene che sia il frutto che produrre si dee nel primo istante, allorchè l' interesse è composto continuo, se $\omega dt$ è il frutto istantaneo per l' interesse semplice. Ma $\omega dt$ sta al frutto annuo dell' unità, come l' istante all' anno intero, cioè $\omega dt : \omega :: dt : 1$; dunque il frutto dell' unità pel primo istante d' impiego a censo composto continuo, che esser dee una quantità minore di $\omega dt$, non può essere in eguale proporzione; cioè non può avere con $\omega$ lo stesso rapporto che $dt$ ha coll' anno.

Se mal non m'appiglio, scoperta abbiamo dunque la svista, in cui il Prof. Lotteri è incorso; quella che portò ad un falso risultato, ed origin fu di accuse non meno insussistenti che ingiuste. Ma, un' altra volta, avrà forse supposto il Prof. Lotteri che in $\omega$

comprender non si dovessero gl' interessi degl' interessi? Io credo di no; e se lo avesse supposto, il suo abbaglio sarebbe meno scusabile del primo. D'Alembert e la comune degli Analisti tutti, come abbiamo già veduto (*s*), considerarono contenersi in $\omega$ anche gl' interessi degl' interessi allorchè si trattò del problema d'interesse composto. Sicchè o svista nello stabilire per frutto istantaneo dell' unità nel censo composto la quantità $\omega dt$, che solo spettar può all' interesse semplice, o avere deviato dall' ipotesi comune, e preteso quindi che da ipotesi diverse dedurre si dovesse il risultato medesimo. Se sono io in inganno, mi si scopra e rinfacci il mio errore, e sarà ciò ben giusto; e se non sono riconvenuto, dirò non ho sbagliato.

Non vorrei però che tal uno da quanto io esposi ne deducesse in conseguenza un giudizio non meno ipotetico che falso, quale sarebbe quello di pensare che una semplice svista diminuir potesse il concetto e la stima dovuta ad un uomo decisamente fornito di cognizioni e sapere, in somma di vero me-

(*s*) Vedasi il §. 7. e la nota *k*.

rito. Nell' attual caso in ispecie, in cui l' operato suo sembrava venisse comprovato da viste che non mancano di certo peso, la mancanza si fa ancor più leggere e condonabile.

Giac. Bernoulli, Gio. Keill, Greg. Fontana, Paolo Frisi, che proposto si sono un problema, il quale ha tutta l'analogia con quello di cui noi trattiamo, che difficilmente da quello si distingue, e che in certo modo chiamare pure si dee d' interesse composto continuo, giunsero essi pure al risultato stesso, a cui è giunto il Prof. Lotteri. In vista di tale risultato, presentato da uomini tanto grandi per quello che compete ad un problema, che quasi si confonde con quello che noi ci proponemmo, e proposto si è la comune degli Analisti, quanto non era facile l'essere preso in inganno? Anzi tutta la mancanza ridurre si può a non avere saputo distinguere due problemi, i quali hanno tutta l' apparenza d' essere un solo.

Ma quale è poi questo problema che proposto si sono i Bernoulli, Keill, Fontana e Frisi? In che consiste la differenza sua da quello che si tratta comunemente? Di tutto ciò si darà pieno ragguaglio, ma prima di passar

più oltre; prima d'introdurci in altre quistioni, di entrare in nuove analisi. tempo ormai egli è di dare evacuo al problema, che proposto ci siamo, e non tenere più sospesa la soluzione del medesimo, già anche più del bisogno differita. Eccocivi pertanto immediatamente.

§. 18. Dalla determinazione del frutto istantaneo dell' unità si ha pure quella del montante dell' unità per un istante; cioè viene da essa determinato cosa in un istante l'unità diventi. Il frutto istantaneo dell' unità, abbiamo già veduto, dover essere $\frac{1}{m} log (1+\omega)$; dunque in un istante l' unità diventar dee $1+\frac{1}{m} log.(1+\omega)$. Ma per semplicità di calcolo ritenendo per poco che $\frac{1}{m} log (1+\omega)$ sia rappresentato da $r$, ciò che 1 diventa in un istante sarà indicato da $1+r$. Ora è chiaro che se in un istante 1 diventa $1+r$, parimenti $1+r$ diventar dee in egual tempuscolo $(1+r)^2$, ed $(1+r)^2$ diventerà $(1+r)^3$, ed $(1+r)^3$ diventerà $(1+r)^4$, ed $(1+r)^4$ diventerà $(1+r)^5$, ec. ec. ec. Dunque 1 nel primo istante va a diventare $1+r$, nel secondo istante diventerà $(1+r)^2$, nel terzo $(1+r)^3$, nel quarto $(1+r)^4$, nel quinto $(1+r)^5$, ec. ec. senza fine. Così è eviden-

te che in $m$ istanti $1$ diventerà $(1+r)^m$ (t); e parimenti in un numero d' istanti rappresentato da $tm$, $1$ diventerà $(1+r)^{tm}$. Ma se $1$ in $tm$ istanti diventa $(1+r)^{tm}$, non è men chiaro che $c$ diventar dee nel tempo stesso $c(1+r)^{tm}$.

E

(t) Se $1$ diventa $(1+r)^m$ in un anno, essendo inchiusa pure nell' enunciato del problema l'ipotesi, che $1$ in compimento dell' anno diventar dee $1+\omega$, è chiaro che si avrà l' equazione $(1+r)^m = 1+\omega$. Eccoci dunque ad un' equazione, da cui avere si potrebbe il valore di $r$, qualora questo fosse tutt' ora incognito. Ecco dunque il modo più semplice di ottenere il valore stesso, secondo indicammo alla nota $p$ del §. 11.

Anche al rimanente calcolo tenuto nei §§. 12. e 13. per liberare la $r$ nell' equazione medesima potrebbe sostituirsene un altro più spedito. Tale sarebbe il seguente:

Prendansi da ambi i membri dell' equazione stessa $(1+r)^m = 1+\omega$ i logaritmi, e si avrà $m \log.(1+r) = \log.(1+\omega)$, ossia $\log.(1+r) = \frac{1}{m}\log.(1+\omega)$, oppure $r - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} +$ ec. $= \frac{1}{m}\log.(1+\omega)$, giacchè sempre intendiamo parlare di logaritmi naturali. Ora essendo $m$ infinita ognuno vede che il secondo membro rappresenta

§. 19. Ora, indicando $m$ come al §. 11. il numero degl' istanti compresi in un anno, se s' intende rappresentato da $t$ il numero degli anni, per cui il capitale $c$ rimane impiegato, è manifesto che, qualunque sia $t$ intero o rotto, $tm$ rappresenterà il numero degl' istanti compresi nello stesso total tempo dell' impiego. Onde chiamato $v$ il cercato montante, cioè la somma a cui monta il capitale $c$ nell' indicato tempo dell' impiego, si avrà evidentemente

$$v = c(1 + r)^{tm}.$$

---

una quantità infinitesima. Dunque infinitesima pure la somma della serie constituente il primo. Dunque *a forziori* infinitesimo sarà il valore di $r$; quindi infinitesimi di secondo, di terzo, di quarto, ec. ordine i valori di $r^2, r^3, r^4$, ec., i quali in conseguenza svanir devono in confronto di $r$. Dunque l'equazione risultata in ultimo si ridurrà ad . . . $r = \frac{1}{m} log. (1 + u)$, come al §. 11.

Non era neppur necessario il discorso qui tenuto per vedere che $r$ ha un valore infinitesimo; bastava riflettere che se in una infinità di istanti si ottiene un frutto di finita grandezza, in un istante solo non può aversene che uno di grandezza infinitamente piccola; e quindi ancor più speditamente si sarebbe determinato il valore di $r$.

E sostituito qui il valore del frutto istantaneo dell' unità $\frac{1}{m} log. (1+\omega)$ in luogo dell' $r$ che lo rappresentava si avrà quindi

$$v = c\left(1 + \frac{1}{m} log. (1+\omega)\right)^{tm}.$$

Formola che prendere si potrebbe per risultato del problema, se non comprendesse l' istante come unità di tempo (*u*), ossia se non comprendesse la specie *m*, che nell' uso pratico riescirebbe d' imbarazzo. Riduciamola dunque ad altra forma più significante, ed adattabile alla pratica, a formola sgombra dell' *m*, e che per unità di tempo comprenda l' anno.

Sviluppo pertanto in serie il secondo membro, ed ottengo

$$v = c\left(1 + tm \times \frac{1}{m} log. (1+\omega) + \quad . \quad . \quad .\right.$$



(*u*) A parlare esattamente non è che il rapporto dell' uno istante al numero degl' istanti compresi in un anno intero che comprendesi nella superiore formola, e non l' istante stesso. La quantità *v* rappresentar dee una somma di danaro, e questa non saprebbe mai essere indicata da tempo, ossia non può il tempo entrare come fattore nella formola, ma deve questo fattore essere numero astratto.

$\frac{tm(tm-1)}{2}\times\frac{1}{m^2}[log.(1+\omega)]^2+$

$\frac{tm(tm-1)(tm-2)}{2.3}\times\frac{1}{m^3}[log.(1+\omega)]^3+$

$\frac{tm(tm-1)(tm-2)(tm-3)}{2.3.4}\times$

$\frac{1}{m^4}[log.(1+\omega)]^4+$ ec.$\Big)$, dove, per essere $tm$ infinito, i fattori $tm-1, tm-2, tm-3$, ec. si riducono tutti a $tm$; onde si dedurrà

$$v=c\Big(1+t\,log.(1+\omega)+\frac{t^2[log.(1+\omega)]^2}{2}+\frac{t^3[log.(1+\omega)]^3}{2.3}+\frac{t^4[log.(1+\omega)]^4}{2.3.4}+ec.\Big)$$

e di qui in fine

$$v=c(1+\omega)^t \quad (x)$$

---

($x$) Nell' Alg. dell' Ab Bossut §. 166. si vede essere $n=1+k\,log.\,n+\frac{k^2(log.\,n)^2}{2}+\frac{k^3(log\,n)^3}{2.3}+$ec. ossia $n=1+log.\,n+\frac{(log.\,n)^2}{2}+\frac{(log.\,n)^3}{2.3}+$ ec. quando $k=1$, cioè quando trattasi di logaritmi naturali, come appunto trattasi nel caso presente. Quindi fatto $n=(1+\omega)^t$, e perciò $log.\,n=t\,log.(1+\omega)$, è manifesto essere pure $(1+\omega)^t=1+t\,log.(1+\omega)+\frac{t^2[log.(1+\omega)]^2}{2}+\frac{t^3[log\,(1+\omega)]^3}{2.3}+\frac{t^4[log.(1+\omega)]^4}{2.3.4}+$ec.

Dunque un capitale qualunque $c$ impiegato a censo composto continuo, in ragione di $\omega$ per 1 all' anno, monta in un numero di anni $t$, qualunque questo siasi intero o rotto, ad una somma espressa dal prodotto del capitale moltiplicato per la potenza di $(1 + \omega)$ indicata dal tempo dell' impiego, preso l'anno per l'unità. E tanto fu egualmente rinvenuto dalla comune degli Analisti, qualunque sia stato il metodo da loro seguito nella soluzione di questo problema. Appunto dunque dalla discordanza de' principj ne venne quella de' risultati, come al §. 14. s'incominciò a sospettarne.

§. 20. Se nel paragrafo precedente, giunto all' equazione $v = c(1 + r)^{tm}$, si fosse svolto in serie il binomio $(1 + r)^{tm}$, si sarebbe ottenuto

$$v = c\Big(1 + tmr + \frac{tm(tm-1)}{2} r^2 + \frac{tm(tm-1)(tm-2)}{2 \cdot 3} r^3 + \ldots\ldots \frac{tm(tm-1)(tm-2)(tm-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} r^4 + \text{ec.}\Big),$$

ovvero

$$v = c\left(1 + tmr + \frac{t^2m^2r^2}{2} + \frac{t^3m^3r^3}{2.3} + \frac{t^4m^4r^4}{2.3.4}\right.$$

$+$ ec. $\Big)$, giacchè, come ivi per essere $tm$ infinito, i fattori $tm - 1$, $tm - 2$, $tm - 3$, ec. si riducono tutti a $tm$ semplicemente. E poichè, dimandata $e$ la base de' logaritmi naturali, il valore della serie

$$1 + tmr + \frac{t^2m^2r^2}{2} + \frac{t^3m^3r^3}{2.3} + \frac{t^4m^4r^4}{2.3.4} +$$

ec. viene rappresentato dall' espressione $e^{tmr}$ (y), sostituita questa in luogo di quella, si sarebbe ottenuto

$$v = ce^{tmr}$$

Equazione del tutto analoga alla trovata sopra §. 3., e che si confonderebbe con quella, se sostituire si potesse la quantità $\omega$ in luogo di $mr$. Sostituito però ad $r$ il suo valore $\frac{1}{m} log.(1 + \omega)$; essa si trasforma in $v = ce^{tm \times \frac{1}{m} log.(1+\omega)}$, ossia $v = ce^{t \times log.(1+\omega)}$,

---

(y) Fatto $n = e^{tmr}$, e quindi $log.\, n$ $(= log\, e^{tmr} = tmr\, log.\, e) = tmr$ ( per essere $log.\, e = 1$ ) nell' equazione $n = 1 + log.\, n + \frac{(log.\, n)^2}{2} + \ldots$

o anche $v = c\, e^{\log.(1+\omega)^t}$. Ma $e^{\log.(1+\omega)^t} = (1+\omega)^t$ (2). Dunque per ultimo risulta

$$v = c(1+\omega)^t$$

come sopra.

E 4

---

$\frac{(\log n)^3}{2.3} + \frac{(\log. n)^4}{2.3.4} +$ ec. della nota (x) del paragrafo precedente, essa si trasforma appunto in quest' altra $e^{tmr} = 1 + tmr + \frac{t^2m^2r^2}{2} + \frac{t^3m^3r^3}{2.3} + \frac{t^4m^4r^4}{2.3.4} +$ ec.

(2) Per vedere che $e^{\log.(1+\omega)^t} = (1+\omega)^t$ suppongasi il valore della quantità stessa $e^{\log.(1+\omega)^t}$ incognito, e pongasi $e^{\log.(1+\omega)^t} = x$. Prendansi quindi i logaritmi pel sistema naturale, e si avrà $\log.\, e^{\log.(1+\omega)^t} = \log.\, x$, ossia $\log\, (1+\omega)^t \times \log.\, e = \log.\, x$, cioè per essere $\log.\, e = 1$, sarà $\log.\, (1+\omega)^t = \log.\, x$. Quindi $x = (1+\omega)^t$. Dunque $e^{\log.(1+\omega)^t} = (1+\omega)^t$.

Più speditamente può dedursi lo stesso in quest' altro modo: $\log.\, (1+\omega)^t = \log.(1+\omega)^t \times \log\, e = \log.\, e^{\log.(1+\omega)^t}$. Dunque, passando dai logaritmi ai numeri $(1+\omega)^t = e^{\log\,(1+\omega)^t}$.

§. 21. Anche dalla formola stessa $ce^{\omega t}$ del §. 3. dedurre si può l'espressione $c(1+\omega)^t$ da noi trovata per valore di $v$, qualora si faccian ivi le opportune correzioni. Poichè dunque $ce^{\omega t}$ fu dedotta prendendo $\omega dt$ come valore del frutto istantaneo dell' unità, supponiamo che $\omega dt$ fosse altra denominazione di $r$, e introduciamo $r$ in luogo di $\omega dt$; e siccome poi valore di $r$ essere dee . . . $\frac{1}{m} log. (1+\omega)$, colla sostituzione successiva di quest' ultima espressione in luogo di $r$, si ridurrà la formola $ce^{\omega t}$ al suo vero valore; ovvero si ridurrà $ce^{\omega t}$ a ciò che esser dee, sostituendo $\frac{1}{m} log.(1+\omega)$ ossia $dt \times log.(1+\omega)$ (*aa*) ad $\omega dt$. A tale effetto osservo che $\omega t = \int \omega dt$, dove non vi vuole costante, poichè svanisce $\int \omega dt$ collo svanire del $t$. Perciò è manifesto che $ce^{\omega t} = ce^{\int \omega dt}$. Mettendo dunque . . . . . $dt . log. (1+\omega)$ in vece di $\omega dt$, si avrà $v = ce^{\int dt . log. (1+\omega)}$, ossia integrando $v = ce^{t \times log. (1+\omega)}$ (*bb*), cioè . . . . .

(*aa*) Si è già avvertito alla nota $r$ del §. 14. che $\frac{1}{m}$ indica, come $dt$, un istante che è identico nelle due espressioni; onde $\frac{1}{m} = dt$.

(*bb*) Si tralascia anche in questo integrale la costante, poichè svaniscono insieme tanto $t$, che $\int dt . log. (1+\omega)$.

$v = c[e^{log.(1+\omega)}]^t$, e poichè $e^{log.(1+\omega)} = 1 + \omega$, sarà in fine $v = c(1+\omega)^t$, come si è asserito.

§. 22. Senza pure avere ricorso ad integrazioni potea vedersi che coll' opportuna correzione la formola $ce^{\omega t}$ si trasforma in quest' altra $c(1+\omega)^t$. Di fatti se dee sostituirsi $\frac{1}{m} log.(1+\omega)$ ad $\omega dt$, è chiaro parimenti che dovrà mettersi $\frac{1}{mdt} log.(1+\omega)$ in luogo di $\omega$, ossia semplicemente $log(1+\omega)$ in luogo di $\omega$; giacchè $m$ rappresentando quì il numero degl' istanti compresi in un anno, è chiaro che $mdt = 1$. Dunque $ce^{\omega t}$ dovrà essere trasformato in $ce^{t \times log.(1+\omega)}$, cioè si avrà $v = ce^{t \times log.(1+\omega)} = c[e^{log.(1+\omega)}]^t = c(1+\omega)^t$.

§. 23. Senz' altro discorso, non si era già veduto §. 14. che la formola $ce^{\omega t}$ fu dedotta prendendo $\omega$ in vece di $log.(1+\omega)$? Messo dunque $log(1+\omega)$ in luogo dell' $\omega$ stesso nella formola $ce^{\omega t}$, è subito veduto che questa cangiar si dee in $ce^{t \times log.(1+\omega)}$, ossia in $c[e^{log.(1+\omega)}]^t$, o in $c(1+\omega)^t$; cioè che si ha $v = c(1+\omega)^t$.

§. 14. Dopo quanto si è detto fin' ora sembrerà forse singolare a tal uno l' osservare che dare si può direttamente, ed in modo alquanto semplice, una soluzione completa del proposto problema, senza il bisogno d' aver ricorso alla determinazione del frutto istantaneo dell' unità come fatto abbiamo, e senza che nulla di meno resti a dirsi la minima parola in obbiezione della formola risultante, o sul processo che per determinarla si tiene.

Ritengo pertanto che $r$ rappresenti il frutto istantaneo dell' unità, e poco importa che sia esso incognito. Sempre però sarà vero che 1 diventa $1+r$ in un istante, $(1+r)^2$ in due istanti, $(1+r)^3$ in tre istanti, $(1+r)^4$ in quattro istanti, ec. ec.; ed in $m$ istanti, qualunque siasi $m$, 1 diventerà $(1+r)^m$; ed in $t$ volte $m$ istanti, ossia in $tm$ istanti 1 diventerà $(1+r)^{tm}$ come al §. 18. Se $m$ dunque rappresenta come sopra il numero degl' istanti compresi in un anno, e $t$ il numero degli anni per cui il capitale $c$ resta impiegato, indicherà $(1+r)^m$ ciò che l' 1 diventa in un anno, ed $(1+r)^{tm}$ ciò che diventa 1 nel tempo $t$. Ma 1 in un anno pel dato del problema diventar dee $1+\omega$;

dunque $(1+r)^m = 1+\omega$; ed innalzando questi due membri alla potenza $t$, si avrà $(1+r)^{tm} = (1+\omega)^t$. Il che indica che nel tempo $t$ la quantità $1$ diventa $(1+\omega)^t$. Dunque del pari la quantità $c$ nel tempo stesso diventerà $c(1+\omega)^t$.

Ecco dunque come la formola $c(1+\omega)^t$ prodotta sia non andando per salti da anno in anno, ma passando successivamente per tutti gl' istanti possibili compresi dal primo momento dell' impiego sino all' ultimo, qualunque sia il numero dei medesimi, senza limitazione alcuna. Onde intendendo rappresentato da $v$ il montante cercato, si avrà l' equazione $v = c(1+\omega)^t$, la quale gode di tutta la generalità possibile per ogni valore che dare si possa a $t$, intero o rotto comunque.

Questo solo mi pare che bastare possa a convincere il Prof. Lotteri che d'Alembert, e tutti gli Analisti, presentando l' equazione medesima per risultato del proposto problema, presentarono quella appunto voluta dall' enunciato del problema stesso; e che per conseguenza la trovata da lui $v = c e^{\omega t}$ non può essere quella del caso; e quindi che egli disse male, dicendo *che lo stesso d' Alembert*

*e tutti gli Analisti incorsi erano in un paralogismo prendendo l'equazione medesima per generale, quando che reggere non può che pei casi di* t *intero*.

Ecco in sostanza le mie viste relativamente al proposto problema del censo composto continuo. Se io poi abbia detto ciò che il uopo richiedeva nol so. Parole in vero anche di troppo; ma sebben di troppo, non forse le occorrenti. Ad ogni modo un finir comunque meno spiacerà che un finir mai.

Passiamo ad altro.

§. 25. Oltre al problema da noi trattato del censo composto continuo, un altro ve n' ha in qualche modo ad esso somigliante, che pure ci interessiamo di analizzare. L'esposizione del medesimo consiste nei termini seguenti:

Se un creditore mette a censo una somma di danaro con legge tale, che in ciascuno istante computar si debba in capitale una parte dell' annuo interesse proporzionale all' istante stesso; si cerca quanto si dovrà al creditor medesimo in capo all' anno?

Per quanto un problema possa essere di piccola portata, non è possibile che se ne dia

un' esatta soluzione, se non s' intende il preciso significato dell' enunciato, che lo espone. Nostra prima cura sia dunque il cercare di rilevare la vera forza delle espressioni formanti l'enunciato medesimo. Rifletto pertanto che dovendosi, com' è prescritto, aggiugnere in ogni istante al capitale una parte dell' annuo interesse proporzionale all' istante decorso, per farla indi fruttare con esso, il problema dee in certo modo annoverarsi nella classe di quelli del censo composto. Ma la prescrizione medesima ci indica pure che, sebben composto sia il problema, non lo è però come quello del censo composto continuo. Nel problema del censo composto continuo si fa passare in capitale l' istantaneo frutto nel momento stesso che viene prodotto quale egli è, senza avere riguardo alcuno alla sua grandezza. Nell' attual problema all' opposto è prescritto di far passare in capitale in ogni istante una parte dell' annuo interesse proporzionale all' istante medesimo. Ora, se si suppone diviso l' anno in istanti uguali, le parti dell' annuo interesse proporzionali agl' istanti stessi saranno tutte eguali. Dunque in ogni istante si dee nell' attuale problema aggiugnere sempre al capitale la

stessa quantità d' interesse. Dove al contrario nel censo composto continuo, facendosi il capitale successivamente maggiore, gl' interessi prodotti in istanti uguali saranno pure successivamente maggiori; e perciò di grandezze diverse dalle parti dell' annuo interesse proporzionali agl' istanti decorsi; quindi nel censo composto continuo gl' interessi che si aggiungono istantaneamente al capitale non sono parti dell' annuo interesse proporzionali agl' istanti decorsi, ma ora minori ed ora maggiori; niente per conseguenza in ciò di analogo a quanto è prescritto nel problema di cui trattiamo ora. Anche in questo per altro il capitale si fa successivamente maggiore, e successivamente maggiori sono pure i frutti che istantaneamente vengono prodotti; ma non successivamente maggiori devon essere quelli da aggiugnersi al capitale. E' prescritto di aggiugnersi parti proporzionali agl' istanti decorsi, cioè parti uguali, se gl' istanti si fanno uguali; quindi nel problema in quistione gl' interessi che istantaneamente si aggiungono al capitale saranno di grandezza ora maggiori ed ora minori di quella degl' interessi prodotti negl' istanti a cui si riferiscono. In complesso però viene

aggiunto in capo all' anno al capitale la total somma degl' interessi in esso prodotti, come nel censo composto continuo; e per conseguenza come in esso vi vengono aggiunti interessi ed interessi d'interessi, e come in esso pure vi vengono aggiunti istantaneamente e continuamente; ma in modo alquanto diverso, come abbiamo di già osservato.

Ecco in sostanza l'analogia che passa tra i due problemi, l' attuale e quello del censo composto continuo, per cui poteasi confondere l'uno con altro (cc); ed ecco pure la sostanziale differenza tra l'uno e l'altro, per cui non devono essere confusi.

§. 26. Sebbene le quì premesse avvertenze servire ci possano a ben dirigerci nella soluzione del proposto problema, inutile non sarà, io credo, il fare qualche parola anche intorno alla ragione, con cui i frutti devono istantaneamente prodursi.

(cc) Il problema di cui qui si ragiona è quello da noi enunciato verso il fine del § 17., che appunto fu preso dal Prof. Letteri per quello del censo composto continuo.

Si è veduto §. 17. che quando la grandezza dell' annuo interesse si prenda la stessa, tanto pel problema del censo composto continuo che per quello del censo semplice, la ragione istantanea, con cui i frutti si producono nel primo, non è eguale a quella con cui vengono prodotti nel secondo; nel primo è più piccola, più grande nel secondo. Il problema che presentemente dee sciogliersi non può confondersi con quello del censo composto continuo, e molto meno con l'altro del censo semplice; onde la ragione, che servire ci dee nell' attuale problema alla determinazione de' frutti istantanei, diversa ancora dee essere, e da quella competente al primo de' due nominati problemi, e da quella competente al secondo. Nell' uno e nell' altro però di questi due problemi, sebbene diversa sia la ragione con cui istantaneamente vengono i frutti prodotti, ella è però in entrambi tale che la somma di tutti i frutti prodotti in un anno viene ad uguagliare l'annuo interesse; e così appunto dee essere se si vuole che la diffinizione data dell' *annuo interesse* abbia luogo ( Vedasi la nota *c* del §. 1. ). Anche nell' attuale problema dunque se vogliamo attenerci alla diffinizione medesima,

la ragione istantanea, con cui si hanno a produrre i frutti, dee essere tale che la somma degl' istantanei interessi prodotti in un anno uguagliar dee appunto l' interesse annuo.

Ma una difficoltà quì mi si affaccia: se nell' attuale problema si sta alla diffinizione, rapporto al significato delle parole *annuo interesse*, cioè se per annuo interesse s' intende il guadagno che si ricava dal capitale posto a censo in termine di un anno, il problema stesso riesce di nessuna entità, qualora l' annuo interesse si dia per dato; giacchè allora nei dati medesimi v' è già espresso ciò che si dimanda *(dd)*; ed all' opposto quando l' annuo interesse non sia dato il problema sembra non essere più solubile per mancanza di un dato necessario, quale è quello da cui può determinarsi la ragione di cui parliamo, cioè la ragione con cui l' interesse dee istantaneamente prodursi.



*(dd)* Se di fatti si dica $a$ la somma di danaro posta a censo, e $b$ il guadagno che da tale somma si ritrae in un anno, è chiaro che sarà $a + b$ ciò che si dovrà al creditore in capo all' anno, qualunque sia il modo con cui $b$ viene prodotto.

Ciò sembrami poter dar luogo a sospettare che nel caso presente debba intendersi per *annuo interesse* qualche cosa di diverso del consueto; ma se ciò fosse la diffinizione non avrebbe più luogo, non sarebbe più vero che per la parola interesse, o per qualunque altra significante lo stesso intendere si dee *il profitto che tira il creditore dal prestito del suo danaro*, come viene comunemente definito (*ee*); o almeno il significato di tal vocabolo sarebbe vago e indeterminato. In oltre ammettendo pure che altra interpretazione debba darsi nell' attuale circostanza a quelle parole, quale sarà poi il significato preciso che vi si dee attribuire? dove si scorge qui che si abbia a desumere. Niente di meno, quando non debba aver luogo il senso voluto dalla diffinizione, sembrami che non si possa più plausibilmente interpretare, che intendendo per *annuo interesse* il solo frutto prodotto in un anno dal puro capitale primitivamente impiegato, esclusi i frutti delle parti proporzionali dell' interesse medesimo

---

(*ee*) Per tralasciar ogn' altro può vedersi l'Encicl. Art. Int.

aggiunte al capital primitivo, che val quanto dire il puro frutto del dato capitale posto a censo semplice, o meglio l'interesse istantaneo del capital primitivo moltiplicato pel numero di tutti gl'istanti compresi nell'anno; alla quale quantità per altro bramerei che altro nome venisse dato piuttosto che la denominazione di annuo interesse (*ff*). Comunque però poco convenga a questa quan-



(*ff*) L'annuo interesse determina l'*annua ragione* con cui il capitale dee annualmente produrre i suoi frutti; dall'annuo interesse viene pure determinata l'*istantanea ragione* con cui i frutti vengono istantaneamente prodotti. La ragione con cui i frutti devono annualmente prodursi è sempre quella dell'annuo interesse del capitale primitivo al capitale stesso; ma la ragione con cui i frutti devono prodursi istantaneamente non è sempre determinata da quella parte dell'annuo interesse che l'istante la è dell'anno intero. Nel solo interesse semplice la *ragione istantanea* con cui i frutti devono prodursi sta alla *ragione con cui devono prodursi annualmente* come l'istante sta all'anno intero; nelle altre specie di censo questa proporzione non esiste più; onde a rigore, se si esclude il censo semplice, l'annuo interesse non può confondersi con quella quantità che divisa pel numero degl'istanti compre-

tità il nome di annuo interesse, si avrà ciò non ostante in essa con che determinare l'interesse istantaneo, ossia la ragione con cui i frutti devono istantaneamente prodursi, vale a dire il dato necessario per sciogliere il problema.

§ 27. Questo però mi piacerebbe che diversamente venisse espresso; e sembrami che più precisa ne sarebbe l'esposizione consistendo in questi termini:

Se dell' annuo interesse che tirare si dovrebbe da un capitale posto a censo semplice se ne aggiugne al capitale medesimo in ogni istante successivo una parte proporzionale all' istante decorso; si cerca quanto si dovrà in capo all' anno a chi pose il suo danaro in impiego sotto tale condizione, in ipotesi che gl' istantanei frutti vengano sempre prodotti colla stessa ragione con cui verrebbero prodotti nell' impiego semplice.

§. 28. Dal riflesso poi che il dato necessario alla soluzione del problema è, non

---

si in un anno dà l'interesse istantaneo del capitale primitivo, ossia la ragione con cui i frutti devono istantaneamente prodursi.

l'annuo interesse, ma la ragione con cui i frutti devono istantaneamente prodursi, e che questa può essere determinata dalla quantità, che dell' istantaneo interesse del capitale primitivo è multipla nel modo qui sopra indicato, si potrà pure passare alla soluzione medesima, supponendo data questa stessa quantità invece dell' annuo interesse, ed intendendo indi per questo ciò che rigorosamente intendere si dee; ed in tal caso il problema potrebbe essere enunciato così:

Se un creditore mette a censo una somma di danaro con legge tale che in ciascuno istante passare debba in capitale una parte dell' annuo interesse proporzionale all' istante decorso; si cerca quanto si dovrà al creditore medesimo in capo all' anno, in ipotesi che gl' istantanei frutti vengano prodotti colla medesima ragione con cui il capitale stesso posto a censo semplice produrrebbe *altro* annuo interesse che supponiamo dato.

§. 29. In fine se il problema riesce pressochè insignificante, quando, intendendo per annuo interesse il guadagno fatto in un anno, si dia questo per dato; ciò succede solo perchè il tempo dell' impiego è limitato alla precisa durata di un anno; ma tale non sa-

rebbe quando il tempo dell' impiego fosse di durata indeterminata, cioè quando si cercasse il montante per un tempo qualunque.

Ponghiamo dunque che il tempo sia un qualunque, ed il problema, oltre al prendere più di generalità, sarà egualmente interessante anche nell' ipotesi presente (*gg*).

§. 30. Ecco pertanto tre ipotesi che nella soluzione del problema si possono seguire; e queste appunto seguendo passiamo tosto alla soluzione medesima. Per scanso però d' ogni confusione mi si permetta di ripetere per ogn' una delle ipotesi stesse l' esposizione del problema che vi si riferisce.

§. 31. Se dell' annuo interesse che tirar si dovrebbe da un capitale posto a censo semplice se ne aggiugne al capital medesimo in ogni istante successivò una parte proporzionale all' istante decorso; si cerca quanto si dovrà dopo un tempo qualunque a chi pose il suo danaro in impiego sotto tale condizione, in ipotesi che gl' istantanei frutti

(*gg*) Questa stessa generalità riguardo al tempo, la quale vogliam dare al problema seguendo quest' ultima ipotesi, intendiamo dargliela non meno attenendoci alle altre due già indicate avanti.

vengano sempre prodotti colla stessa ragione, con cui verrebbero prodotti nell' impiego semplice.

Sia $c$ il capitale che si mette a censo; sia $t$ il total tempo dell' impiego; sia $r$ l'annuo frutto dell' unità impiegata a censo semplice. Supponiamo in oltre che il total tempo dell' impiego sia diviso in un numero infinito $m$ di tempuscoli infinitesimi $dt, dt, dt$, ec. tutti eguali tra loro; onde abbiasi $mdt = t$. Ciò posto, considerando il solo capitale $1$, l' annuo interesse semplice di $1$ è $r$; una parte quindi di $r$ proporzionale a ciascun tempuscolo $dt$ sarà $rdt$; dico ciascuno giacchè tutti si sono presi di uguale grandezza. Dunque dopo ogni istante il capitale dovrà computarsi aumentato di $rdt$, affine di soddisfare alla condizione del problema. Dunque il capitale pel primo istante sarà $1$, pel secondo sarà $1 + rdt$, pel terzo $1 + 2rdt$, pel quarto $1 + 3rdt$, ec. ec., e per l' istante $m^{esimo}$ sarà $1 + (m - 1)rdt$, ossia, per essere $m$ infinito, sarà il capitale per l' ultimo istante $1 + mrdt$. Ora questi capitali devono produrre i loro frutti colla stessa ragione con cui verrebbero prodotti quelli del capitale

primitivo posto a censo semplice; ma questo li produrrebbe istantaneamente nella ragione di $1 : rdt$, essendo pure $rdt$ il frutto che vien prodotto in un istante da $1$ posto a censo semplice. Dunque egualmente nella ragione di $1 : rdt$ devono i precedenti capitali produrre istantaneamente i frutti loro. Osservo pertanto che i frutti di $rdt$, di $2rdt$, di $3rdt$, di ec. ec., e di $mrdt$, dessunti colla stessa ragione di $rdt$ per $1$, devono essere $r^2dt^2$, $2r^2dt^2$, $3r^2dt^2$, ec. ec., $mr^2dt^2$; e quindi i frutti dei precedenti capitali $1$, $1 + rdt$, $1 + 2rdt$, $1 + 3rdt$, ec. ec., $1 + mrdt$ competenti al primo, al secondo, al terzo, al quarto, ec. ec. all' ultimo istante dell' impiego, dessunti sempre coll' indicata ragione, saranno $rdt$, $rdt + r^2dt^2$, $rdt + 2r^2dt^2$, $rdt + 3r^2dt^2$, ec. ec., $rdt + mr^2dt^2$. Tutti questi frutti formano evidentemente una progressione aritmetica, di cui $r^2dt^2$ ne è la differenza, $rdt$ il primo termine, $rdt + mr^2dt^2$ l' ultimo, ed $m$ il numero de' termini; onde si avrà la somma della progressione stessa, cioè si avrà la somma di tutti i frutti prodotti nel tempo $t$ dell' impiego nell' espressione $rdt$, $+ rdt + r^2dt^2$, $+ rdt + 2r^2dt^2$, $+ rdt + 3r^2dt^2$, $+$ ec. ec., $+ rdt + mr^2dt^2 =$

$( rdt + rdt + mr^2 dt^2 ) \frac{m}{2} = mrdt + \ldots$,

$\frac{m^2 r^2 dt^2}{2} = rt + \frac{r^2 t^2}{2}$ ; giacchè $mdt = t$.

Aggiunta dunque questa somma di frutti al capitale primitivo $1$, si avrà $1 + rt + \frac{r^2 t^2}{2}$ per ciò che diventa $1$ nel tempo $t$. Quindi se $1$ nel tempo $t$ diventa $1 + rt + \frac{r^2 t^2}{2}$, è chiaro che $c$ nell' egual tempo diventerà $c\left( 1 + rt + \frac{r^2 t^2}{2} \right)$. E chiamando quindi $v$ la somma dovuta a chi è in isborso del suo danaro sotto le esposte condizioni si avrà in fine

$$v = c\left( 1 + rt + \frac{r^2 t^2}{2} \right) \quad (hh) .$$

---

(*hh*) Secondo questa prima ipotesi non ha luogo ciò che si disse al §. 25., cioè che in capo all' anno venga aggiunto al capitale la totale somma degl' interessi ed interessi degl' interessi in esso prodotti, come nel censo composto continuo : E' chiaro che in questo caso non vengono aggiunti al capitale se non gl' interessi semplici . Nelle altre due ipotesi però, che siamo per seguire, dove per annuo in-

§. 32. Al risultato medesimo si sarebbe giunto quando il problema si fosse esposto in questi altri termini:

Un capitale è posto a censo con condizione che in ogni istante si faccia passare in capitale il frutto che pure in ogni istante viene prodotto dal capitale stesso posto primitivamente in impiego. Si cerca la somma dovuta dopo un tempo qualunque a chi pose il suo danaro in impiego sotto tale condizione, in ipotesi che la ragione con cui i frutti devono istantaneamente prodursi sia una parte della ragione $r:1$, quale l'istante la è dell' anno intero, cioè in ipotesi che i frutti vengano istantaneamente prodotti nella ragione di $rdt$ per $1$.

§. 33. Se nella testè trovata formola si fa $t=1$, si avrà la somma dovuta in capo all' anno espressa da

$$v=c\left(1+r^{1}+\frac{r^2}{2}\right)$$

Di qui pure si fa manifesto che nell' ipotesi

---

teresse si prende il totale guadagno fatto in un anno, la cosa va appunto come al citato paragrafo fu asserito.

ora seguita l'annuo guadagno di $c$ viene rappresentato da $c\left(r + \frac{r^2}{2}\right)$; e che l'annuo guadagno dell'unità lo è da $r + \frac{r^2}{2}$, e non semplicemente da $r$. Bene inteso pure che l'indicata grandezza $r + \frac{r^2}{2}$ di questo guadagno compete solo al prim' anno; e che quella competente agli anni successivi si fa sempre successivamente maggiore, e così appunto deve succedere, poichè da anno in anno il capitale che trovasi in impiego è sempre successivamente aumentato di $r$, senza però che le parti proporzionali del frutto della stessa $r$ vengano aggiunte al capitale, come viene praticato delle parti proporzionali del frutto dell' unità; per cui ne viene che, essendo $r^2dt$ il frutto istantaneo di $r$, il frutto annuale della stessa $r$ che non viene per niente aumentato, sarà $nr^2dt$ ossia $r^2$, indicando con $n$ il numero infinito degl' istanti compresi in un anno; ed appunto di $r^2$ si fa successivamente maggiore il frutto annuale dell' unità, come è facile di vedere.

Altri riflessi e conseguenze potrebbero dedursi corrispondentemente a questa prima

ipotesi, ma tale non è il nostro scopo; onde passiamo alla seconda.

§. 34. Se un creditore mette a censo una somma di danaro con legge tale che in ciascuno istante passar debba in capitale una parte dell' annuo interesse proporzionale all' istante decorso; si cerca quanto si dovrà al creditor medesimo dopo un tempo qualunque, in ipotesi che gl' istantanei frutti vengano prodotti colla medesima ragione, con cui il capitale medesimo posto a censo semplice produrrebbe *altro* annuo interesse che supponiamo dato.

Ritenute tutte le precedenti denominazioni, sia inoltre rappresentato da $\omega$ l' interesse annuo, il quale ora ammettiamo per incognito, ma presto determineremo. Una parte quindi di questo proporzionale all' istante $dt$ sarà espresso da $\omega dt$; onde i capitali competenti agl' istanti successivi verranno rappresentati da $1$, $1+\omega dt$, $1+2\omega dt$, $1+3\omega dt$, ec. ec., $1+m\omega dt$. Inoltre essendo $r$ il frutto annuo dell' unità posta a censo semplice, sarà $rdt$ il frutto dell' unità stessa prodotto nel tempuscolo $dt$; ossia sarà espressa da $rdt:1$ la ragione istantanea con cui i frutti devono prodursi. Ora secondo questa ragione i frutti

delle quantità $\omega dt$, $2\omega dt$, $3\omega dt$, ec. ec., $m\omega dt$ sono $r\omega dt^2$, $2r\omega dt^2$, $3r\omega dt^2$, ec. ec., $mr\omega dt^2$; quindi i frutti dei precedenti capitali $1$, $1+\omega dt$, $1+2\omega dt$, $1+3\omega dt$, ec. ec., $1+m\omega dt$ competenti agl' istanti successivi saranno espressi da $rdt$, $rdt+r\omega dt^2$, $rdt+2r\omega dt^2$, $rdt+3r\omega dt^2$, ec. ec., $rdt+mr\omega dt^2$; la cui somma sarà $(2rdt+mr\omega dt^2)\frac{m}{2} = rmdt + \frac{r\omega m^2dt^2}{2} = rt + \frac{r\omega t^2}{2}$, la quale rappresenta il total frutto prodotto dall' unità nel tempo $t$ dell' impiego. Ma quando $t=1$, l' espressione stessa $rt + \frac{r\omega t^2}{2}$ si riduce ad $r + \frac{r\omega}{2}$; ed il frutto annuo dell' unità si è posto $=\omega$; onde $r + \frac{r\omega}{2} = \omega$; e di qui $\omega = \frac{2r}{2-r}$; il qual valore di $\omega$ sostituito nell' espressione precedente, la trasformerà in quest' altra $rt + \frac{rt^2}{2} \times \frac{2r}{2-r} = rt + \frac{r^2t^2}{2-r}$, che pure rappresenta il frutto dell' unità prodotto nel total tempo $t$ dell'

impiego. Aggiunto pertanto questo frutto al capitale 1 che lo produsse, si avrà $1 + rt + \frac{r^2t^2}{2-r}$, che rappresenterà ciò che diventa 1 nel medesimo tempo $t$. Ma se 1 nel tempo $t$ diventa $1 + rt + \frac{r^2t^2}{2-r}$, è chiaro che $c$ in egual tempo diventerà . . . . $c\left(1 + rt + \frac{r^2t^2}{2-r}\right)$. Onde in fine si avrà per questa seconda ipotesi

$$v = c\left(1 + rt + \frac{r^2t^2}{2-r}\right).$$

§. 35. Se qui pure si fanno delle riflessioni analoghe alle già fatte al §. 33. si vedrà che l'annuo frutto dell'unità viene espresso da $\frac{2r}{2-r}$; il quale però come sopra rappresenta l'annuo frutto dell'unità sola; e per conseguenza compete solo al prim'anno, giacchè negli anni successivi, oltre al capitale 1 vi è pure a produrre i suoi frutti anche il frutto stesso $\frac{2r}{2-r}$ preso tante volte, quanti sono gli anni trascorsi; dei quali frutti non sono poi aggiunte al capitale le parti proporzionali, come quelle del frutto primitivo

$\frac{2r}{2-r}$. Onde ad ogni anno successivo il frutto annuale verrà aumentato a norma che viene aumentato il capitale, cioè verrà aumentato del frutto che vien prodotto da $\frac{2r}{2-r}$, e prodotto come sopra secondo la ragione istantanea di $rdt$ per 1, senza altro aumento. Ma passiamo alla terza ipotesi.

§. 36. Se un creditore mette a censo una somma di danaro con legge tale che in ciascuno istante computar si debba in capitale una parte dell' annuo interesse proporzionale all' istante stesso; si cerca quanto si dovrà al creditor medesimo dopo un tempo qualunque, in ipotesi che l' annuo interesse sia dato.

Rappresenti, come nell' ipotesi precedente, $c$ il capitale posto a censo, $\omega$ l' annuo frutto dell' unità, $t$ il total tempo dell' impiego, $v$ il montante, o la quantità cercata, $m$ il numero infinito degl' istanti compresi nel tempo dato $t$, e $dt$ un istante qualunque; inoltre comunque incognita sia la ragione, con cui i frutti devono istantaneamente prodursi, indichiamola con $rdt : 1$, la quale però verrà determinata, col determinarsi della $r$, che

appunto determineremo. Ciò posto considerando qui pure il solo capitale $1$, dovrà questo, per la condizione del problema, essere aumentato in ogni istante successivo della quantità $\omega dt$, che è la parte dell' annuo frutto dell' unità proporzionale all' istante decorso. Quindi il capitale che fruttar deve negl' istanti successivi verrà espresso da $1$, $1+\omega dt$, $1+2\omega dt$, $1+3\omega dt$, ec., $1+m\omega dt$; ma la ragione con cui i frutti devono istantaneamente prodursi abbiamo posto essere $rdt$ per $1$; perciò i frutti che si avranno negl' istanti successivi e corrispondenti ai precedenti capitali saranno $rdt$, $rdt+r\omega dt^2$, $rdt+2r\omega dt^2$, $rdt+3r\omega dt^2$, ec., $rdt+mr\omega dt^2$. Somma di questi frutti, che rappresenta il frutto totale prodotto nel tempo $t$ dell' impiego, sarà $(2rdt+mr\omega dt^2)\frac{m}{2} = rmdt + \frac{r\omega m^2 dt^2}{2} = rt + \frac{r\omega t^2}{2}$; che si riduce ad $r + \frac{r\omega}{2}$ quando si prenda $t$ eguale ad un anno; ma in un anno per ipotesi $1$ frutta $\omega$; dunque $r + \frac{r\omega}{2} = \omega$; da cui si deduce $r = \frac{2\omega}{2+\omega}$; il quale valore di $r$ sostituito

nell' espressione $rt + \frac{r\omega t^2}{2}$, la trasformerà in quest' altra $\frac{2\omega t}{2+\omega} + \frac{\omega^2 t^2}{2+\omega} = \ldots$ $\frac{\omega t}{2+\omega}(2 + \omega t)$, che esprimerà pure il frutto prodotto dall' unità nel total tempo $t$. Quindi aggiugnendo questo frutto al capitale $1$, da cui viene prodotto, la somma $1 + \frac{\omega t}{2+\omega}(2+\omega t)$ rappresenterà il montante dell' unità corrispondente al tempo $t$ dell' impiego, cioè rappresenterà ciò che $1$ va a diventare in tal tempo. Se dunque il capitale dato $c$ contiene l' unità $c$ volte, $c$ volte pure il qui indicato montante esprimerà ciò che $c$ diventa nello stesso tempo $t$ dell' impiego; onde si avrà in fine

$$v = c\left(1 + \frac{\omega t}{2+\omega}(2+\omega t)\right),$$

che è quanto si cercava in questa terza ipotesi.

§. 37. La presente formola, sebbene sembri in qualche maniera diversa dalla trovata nell' ipotesi precedente, non ne differisce sostanzialmente per nulla; per modo che l' una si trasforma nell' altra, qualora si cacci dall'

una l'$r$, o dall' altra l'$\omega$. E di fatti il problema da cui si dedusse l'una è identico con quello da cui si ottiene l'altra, a sola differenza che nell' uno era dato l'$r$, e non l'$\omega$; e nell' altro l'$\omega$ e non l'$r$; quali $r$ ed $\omega$, presi separatamente, hanno pure in entrambi i problemi il medesimo significato; pel che le due formole devono del pari confondersi sostanzialmente l'una con l'altra, come appunto vi si confondono. Quando dunque non voglia ripetersi ciò che si è già detto, inutile sarà il fare qui di nuovo que' riflessi sulla grandezza dell' annuo interesse, che già fatto abbiamo di sopra in seguito alla soluzione spettante all' ipotesi precedente. Se le due formole sono in sostanza identiche, ed identico in entrambe il significato di ciascun elemento che le compongono, identiche pure devono essere le conseguenze che ne possiamo dedurre.

§. 38. Delle tre seguite ipotesi poi l'ultima, io credo, sia quella che più convenga all' esposizione del problema, quale è proposta al §. 25.; ma limitando il tempo, come ivi è limitato, la formola

$v = c\left(1 + \frac{\omega t}{2+\omega}(2 + \omega t)\right)$ che vi si

riferisce si riduce a $v = c(1+w)$, ed il problema, come abbiamo già detto, perde affatto quella importanza, di cui può sembrar fornito.

Comunque però sia la cosa, quello che richiamar dee la nostra attenzione si è, che niuna delle formole da noi trovate coincide con quella trovata per tal problema da Bernoulli, da Fontana, da Frisi (*ii*). Il loro risultato per un tempo qualunque sarebbe $v = c\,e^{wt}$, ossia limitando il tempo alla sola durata di un anno egli è $v = ce^{w}$. Ma e di quanti problemi dovrà mai questa formola essere risultato, senza che per noi lo sia ancor d'alcuno? Discordare con uno non è meraviglia; discordare con tutti mi sembra più che strano? Che uno incorra in una svista, questo è nell'infelice ordine delle umane cose; che molti ne faccian in diverso modo per giugnere al medesimo risultato, senza aver di mira lo scopo stesso, non mi pare in alcun modo naturale. Che la mia discordanza dai



(*ii*) Non includo Keill, come ho di già avvertito nell'ultima nota alla prefazione, giacchè da lui viene modificato il senso del problema ad altro.

nominati Geometri supponga indispensabilmente una svista, mi sembra pure evidente. Immaginare che questa siasi incorsa da uomini sommi, e non da me, mi pare stoltezza. Penso . . . . medito . . . esito . . . mi pare di scorgere, nè so cosa mi vegga . . . . ma un pensier franco mi dice *Sei tu che sogni e non dormichia Omero*. Dunque l'error è mio? ma dove, dove l'ho io commesso?

Io non intendo gareggiare con uomini tanto superiori; ciò sarebbe temerità; ma non sapendo scorgere difetto nell'andamento da me tenuto nella determinazione de' miei risultati, dimando che mi si conceda di fare le mie riflessioni anche su quello che conduce al risultato loro. A tanto son io portato dal riflesso che anche nelle cose minime possono incorrere degli sbagli, qualora non vi si presti la dovuta attenzione, e che questa, in certo modo, sembra che più difficilmente possa usarsi da uomini grandi, allorchè appunto si tratta di cose di poca entità e meno difficili. In ogni modo protesto di esporre le stesse riflessioni mie senza la minima prosonzione e semplicemente per quello che a me pare.

§. 39. Chiamatosi dunque dai nominati Autori $a$ la somma di danaro posta a censo, $b$ l' annuo interesse, $n$ il numero infinito degl' istanti compresi in un anno, si prese $\frac{b}{n}$ pel frutto prodotto nel primo istante; è quindi $a + \frac{b}{n}$ pel capitale in fine dell' istante medesimo. In seguito si disse: se il capitale $a$ nel primo istante produsse il frutto $\frac{b}{n}$, il capitale $a + \frac{b}{n}$ produrrà nel secondo istante il frutto $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, il quale aggiunto al capitale $a + \frac{b}{n}$ dà per capitale in fine del secondo istante la quantità . . . $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2}{a}$; da cui nel terzo istante si ottiene il frutto $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a^2}$, che aggiunto pure al capitale $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2}{a}$ presenta per

capitale in fine del terzo istante la quantità
$\dfrac{\left(a+\dfrac{b}{n}\right)^2}{a}$; e così successivamente.

§. 40. Tale è l'andamento da cui si deduce in fine la formola che dai riferiti Autori si assegna per quella dimandata dal proposto problema. Ora un tale andamento soddisfa egli poi alla condizione del problema stesso, la quale lo contradistingue dagli altri? Con esso si aggiugne al capitale, come il problema psescrive, in ogni istante una parte dell'annuo interesse proporzionale all'istante stesso? Io non veggo in vece se non che in ogni istante si aggiugne al capitale il total frutto che pure in ogni istante viene prodotto. Converrebbe dunque, perchè la condizione del problema fosse soddisfatta, che i frutti prodotti in ogni istante fossero essi stessi parti dell' annuo interesse proporzionali agl' istanti medesimi; ma che ciò sia io nol so comprendere in modo alcuno. L'annuo interesse si è denominato $b$; gl' istanti successivi, nei quali si determinarono i frutti istantanei $\dfrac{b}{n}$, $\dfrac{\left(a+\dfrac{b}{n}\right)\dfrac{b}{n}}{a}$, $\dfrac{\left(a+\dfrac{b}{n}\right)^2\dfrac{b}{n}}{a^2}$, ec.

si fecero tutti eguali, come è chiaro. Dunque le parti dell' annuo interesse proporzionali agl' istanti stessi dovranno essere parti di $b$ tutte uguali; ed essendo $n$ il numero degl' istanti compresi in un anno, ciascuna delle parti stesse verrà espressa da $\frac{b}{n}$. Se queste parti dunque sono costantemente $\frac{b}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{b}{n}$, ec., non lo possono essere $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a}$, ec.; cioè potrebbe dirsi in conclusione; o l'annuo interesse è $b$, come si è posto, e le parti dell' annuo interesse da aggiugnersi al capitale in ciascuno istante saranno $\frac{b}{n}$, $\frac{b}{n}$, $\frac{b}{n}$, ec.; o le parti proporzionali dell' annuo interesse da aggiugnersi al capitale sono $\frac{b}{n}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a^2}$, ec., e l' annuo interesse

non sarà più $b$. Ma posto anche che l'annuo interesse non fosse $b$, esso però sarà sempre una quantità di fissata e determinata grandezza. Comunque variabile sia la grandezza del capitale durante il censo, e variabile quella dell' istantaneo frutto che ne viene prodotto, se l'annuo interesse non è che la somma di tutti i frutti istantanei prodotti nella durata di un anno, la sua grandezza sarà sempre fissata e determinata nella somma medesima, che non può essere che quella tale e non altra (*kk*). Quindi, essendo uguali gl' istanti successivi, le parti dell' annuo interesse proporzionali agl' istanti stessi saranno sempre quantità uguali. Non mai

(*kk*) Qui per altro scorgiamo che la somma degl' istantanei frutti prodotti in un anno non è punto $b$, ma $b + \frac{b^2}{2a} + \frac{b^2}{2.3a^2}, +$ ec., come è facile il dedurlo sommando di fatti i frutti medesimi; pel che convien dire: o non è vero che l' annuo interesse sia la somma di tutti i frutti istantanei prodotti nella durata di un anno, o l'annuo interesse non è il $b$ che si è denominato, o il problema è male espresso, o meglio forse io non so intenderlo.

dunque le quantità $\frac{b}{n}$, $\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$, ec., le quali da istante in istante si vanno facendo ognor maggiori.

§. 41. Ritenuto dunque che l'annuo interesse sia $b$, la condizione del problema non può essere soddisfatta che aumentandosi il capitale in ogni istante della quantità $\frac{b}{n}$, e non altro. Se dunque col precedente andamento il capitale viene aumentato negl' istanti successivi delle quantità $\frac{b}{n}$, $\frac{\left(n + \frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$, ec., la prescrizione del problema non è soddisfatta che nel solo primo istante, non più negl' istanti successivi.

§. 42. Qui per altro potrebbe obbiettare tal uno: se $\frac{b}{n}$, ha la grandezza conveniente pel primo istante, forz' è che anche . . . $\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a + \frac{b}{n}\right)^2 \frac{b}{n}}{a^2}$, ec. sieno

della grandezza opportuna per gl' istanti successivi; giacchè non può essere $\frac{b}{n}$ frutto di $a$ capitale pel primo istante, senza che $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a^2}$, ec. lo sieno di $a+\frac{b}{b}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2}{a}$, ec. capitali corrispondenti agl' istanti secondo, terzo ec. Accordo che se $\frac{b}{n}$ è il frutto pel primo istante, saranno necessariamente ....... $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a^2}$, ec. i frutti per gl' istanti successivi, qualora i frutti stessi si faccian passare per intero in capitale al momento stesso in cui vengono prodotti; ma chi dice che $\frac{b}{n}$ debba essere il frutto pel primo istante, chi dice che i frutti debbano passare per intero in capitale? Il problema prescrive che $\frac{b}{n}$ sia la parte da aggiugnersi al capitale nel primo istante, non che debba essere il frutto da prodursi nell'

istante medesimo (*ll*); nemmeno prescrive, come nell' indicato andamento viene praticato, che di mano in mano si aggiungano al capitale i frutti che istantaneamente vanno producendosi. Ciò compete al censo composto continuo; nè questo è il proposto. La sola prescrizione che io scorgo nel problema di cui trattiamo si è che in ciascuno istante

---

(*ll*) Se per annuo interesse s' intende la somma di tutti i frutti istantanei prodotti nella durata di un anno, e se è fissato che esso debba essere il $b$ denominato, il frutto da prodursi nel primo istante dee necessariamente essere minore di $\frac{b}{n}$; poichè facendosi il capitale successivamente maggiore, successivamente maggiori saranno pure i frutti che si andranno producendo negl' istanti successivi; nè per conseguenza un numero $n$ di questi frutti istantanei potrebbe uguagliare il solo $b$, se essendo alcuni maggiori di $\frac{b}{n}$, non ve ne fossero altri minori, i quali appunto competere devono agl' istanti primi. Con ciò vediamo che nei primi istanti si dee aggiugnere al capitale qualche cosa di più dei frutti che si producono negl' istanti stessi; nè questo dee fare difficoltà, se la prescrizione del problema lo vuole.

deesi aggiugnere al capitale la quantità $\frac{b}{n}$;
se $b$ è l' interesse annuo. Il che è appunto ciò che non viene eseguito.

§. 43. Se per avventura si dicesse che non solo $\frac{b}{n}$ è parte di un annuo interesse proporzionale ad un istante, ma che anche $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a^2}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^3\frac{b}{n}}{a^3}$, ec. sono egualmente parti di altri annui interessi proporzionali ciascuna ad un istante; e che perciò la condizione del problema fu soddisfatta coll' aggiugnersi successivamente al capitale le quantità stesse $\frac{b}{n}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)\frac{b}{n}}{a}$, $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2\frac{b}{n}}{a^2}$, ec., si avrebbe a rispondere che l' esposizione del problema non indica altro annuo interesse che quello del capitale dato, e così nella denominazione non si è nominato per annuo interesse che il solo $b$, come egualmente in tutto l' andamento tenuto nella soluzione non si parla mai di nuovi altri annui interessi diversi dell' annuo interesse $b$; e che inoltre si chiama *annuo* perchè s' intende che com-

peta alla durata di un *anno*, perchè si produce in un anno, comunque equabilmente o inequabilmente, cioè comunque ritenendo il capitale la sua grandezza primitiva, oppure diventando esso successivamente maggiore. Onde *b* non dee competere soltanto al primo istante, ma a tutti gl' istanti compresi nell' anno; e quindi tutti gl' istantanei frutti prodotti in un anno, comunque disuguali, non possono competere che all' annuo interesse denominato, che a *b* (mm). Se almeno si fosse fatto qualche cenno che si avevano a considerare altri annui interessi diversi da *b*, pure poteasi immaginare che nuova foggia d' intendere convenisse nel caso presente; ma come concepirne il minimo sospetto, se non si diede mai indicio alcuno?

Per quanto a me pare adunque (nè bramo che maggior peso si dia a ciò che qui

---

(mm) Perchè però il denominato annuo interesse *b* possa uguagliare la somma di tutti gl' istantanei frutti prodotti in un anno, conviene che con altra ragione vengano essi prodotti, ed altra grandezza abbiano di quella che nel tenuto andamento vi viene fissato; ciò che già abbiamo osservato nelle note precedenti.

dissi di quello che dare si possa a parole dette solo *per quello che a me pare*, nè mai spacciate per verità senza eccezione ) con l'indicato andamento non si soddisfa alla condizione del problema, nè per conseguenza la formola che se ne deduce può aversi per quella dimandata dall' enunciato del problema medesimo.

§. 44. Ma se l'equazione $v = ce^{\omega t}$ voluta già per risultato dei due problemi proposti, il primo al §. 2., ed il secondo al §. 25., non può soddisfare nè all' uno, nè all' altro, a quale mai altro problema può essa competere? Facil cosa sarà il vederlo se richiamiamo l'analisi che già fatto n'abbiamo in decorso.

Rifletto pertanto che nel rintracciare la formola $ce^{\omega t}$ §. 3. si fecero passare in capitale tutti gl' istantanei frutti al momento stesso che si producevano; per cui il problema a cui tal formola compete chiamar si dee a censo composto continuo. Rifletto pure che l' istantaneo frutto dell' unità ivi preso è una porzione di $\omega$ tale quale l' istante la è dell' anno intero §. 15., ossia che l' istantaneo frutto dell' unità ha lo stesso rapporto con $\omega$ che l' istante ha coll' anno intero §. 17, Ma

cos'è poi $\omega$? Può dirsi che questo sia il frutto annuo dell'unità? Il frutto annuo dell'unità, secondo la diffinizione, non è che l'aumento dell'unità stessa acquistato in un anno, ossia l'eccesso del suo montante per un anno sopra l'unità medesima; e giacchè il montante dell'unità per un anno è $e^{\omega}$, come risulta dal medesimo §. 3. (*nn*), così il frutto annuo dell'unità è più che $\omega$; egli è $e^{\omega}-1$, cioè $\omega+\frac{\omega^2}{2}+\frac{\omega^3}{2.3}+\frac{\omega^4}{2.3.4}+$ ec. Di qui però scorgesi che $\omega = log.\, e^{\omega}$ (*oo*); cioè $\omega$ altro non è che il logaritmo naturale del montante dell'unità

(*nn*) L'espressione $ce^{\omega t}$ non è che $e^{\omega}$, quando $c=1$, e $t=1$; cioè $e^{\omega}$ rappresenta il montante dell'unità per un anno, allorchè il frutto istantaneo è $\omega dt$.

(*oo*) Dall'equazione $n = 1 + log.\, n + \frac{(log.\, n)^2}{2} + \frac{(log.\, n)^3}{2.3} + \frac{(log.\, n)^4}{2.3.4} +$ ec. indicata alla nota *x* del §. 19., prendendo i logaritmi, ne viene $log.\, n = log.\left(1 + log.\, n + \frac{(log.\, n)^2}{2} + \frac{(log.\, n)^3}{2.3} + \frac{(log.\, n)^4}{2.3.4} + \text{ec.}\right)$; e fatto

per un anno; come si può dedurre anche dal §. 13. (*pp*). Ma meglio si denominerà $\omega$, osservando che egli non è se non l'aggregato di tutti gl'istantanei frutti prodotti in un anno dall'unità semplicemente § 15., cioè non è che il frutto dell'unità impiegata per un anno a censo semplice.

Ecco dunque come può enunciarsi il problema a cui l'equazione $v = ce^{\omega t}$ si riferisce.

---

in questa $log.\ n = \omega$ ne dedurremo .......

$$\omega = log.\left(1 + \omega + \frac{\omega^2}{2} + \frac{\omega^3}{2\cdot 3} + \frac{\omega^4}{2\cdot 3\cdot 4} + ec.\right) = log.\ e^{\omega}.$$

Più speditamente poi si vede che $log.\ e^{\omega} = \omega\, log.\ e = \omega$, per essere $log.\ e = 1$.

(*pp* Al § 13. si è veduto che il frutto istantaneo $r$ dell'unità posta a censo composto continuo non può essere che la parte $m^{esima}$ del logaritmo naturale della quantità $1 + \omega$, ossia del montante dell'unità per un anno, giacchè $\omega$ rappresenta ivi l'annuo frutto. Dunque qui pure il frutto istantaneo dell'unità, vale a dire $\omega dt$, dovrà essere la $m^{esima}$ parte del logaritmo naturale del montante dell'unità che compete al frutto medesimo; cioè si avrà $\omega dt = \frac{1}{m}\ log.\ e^{\omega}$, ossia $\omega = log.\ e^{\omega}$, giacchè $dt = \frac{1}{m}$, come abbiamo già indicato replicatamente.

Si cerca cosa diventerà un capitale $c$ impiegato a censo composto continuo per un tempo qualunque $t$, in ipotesi che l'unità diventi in capo all'anno $1 + \omega$ pel solo aumento dei frutti semplici.

Con ciò abbiamo una volta la precisa esposizione del problema, a cui l'equazione $v = ce^{\omega t}$ dire si può che veramente compete.

§. 45. Con questa precisione però di esposizione non intendo dire che sia l'unica; giacchè essa variare si può in diversi modi, senza che pure si cangi della sostanza del problema medesimo, che dimanda l'equazione $v = ce^{\omega t}$ per risultato.

Così potrebbe esporsi in questi termini:

1.° Cosa diventerà il capitale $c$ impiegato a censo composto continuo per un tempo qualunque $t$, supponendo che la ragione istantanea, con cui questo capitale dee produrre i suoi frutti sia quella stessa, con cui l'unità impiegata a censo semplice produce l'annuo interesse $\omega$ (qq).



(qq) Poichè nel censo semplice il frutto prodotto è proporzionale al tempo decorso, così essen-

Od anche in questi altri:

2.° Si cerca il montante del capitale $c$ impiegato a censo composto continuo per un tempo qualunque $t$, in ragione di $e^{\omega} - 1$ per 1 all' anno (*rr*).

Anche l' enunciazione seguente, la quale per altro espone un problema che non può più chiamarsi identico col precedente, porta al risultato $ce^{\omega t} = v$, quando si dica $v$ la grandezza del capitale cercata.

---

do $\omega$ il frutto annuo dell' unità, sarà $\omega dt$ il frutto dell' unità stessa corrispondente al tempo $dt$; cioè sarà $\omega dt$ : 1 la ragione con cui devono istantaneamente prodursi i frutti nel proposto problema di censo composto continuo. Dunque sarà $ce^{\omega t}$ il montante cercato.

(*rr*) Se $e^{\omega} - 1$ è l' annuo frutto dell' unità, sarà $e^{\omega}$ il montante annuo dell' unità stessa; ma pel censo composto continuo il frutto istantaneo dell' unità dee essere, §. 13., la m^esima^ parte del logaritmo naturale del montante stesso (indicando $m$ il numero degl' istanti compresi in un anno), dunque questo istantaneo frutto sarà $\frac{1}{m} \log. e^{\omega} = \frac{1}{m} \omega \log. e = \frac{1}{m} \omega$, ossia $\omega dt$ (vedasi la nota $r$ ovvero la nota $aa$). Dunque di nuovo sarà $ce^{\omega t}$ il montante cercato.

3.° Un capitale, il quale posto a censo si suppone farsi successivamente maggiore pel continuo aumento dell' istantaneo frutto che da esso viene prodotto, si vuole considerare ciò non ostante come puro capitale cangiante impiegato a censo semplice in ragione di $\omega$ per 1 all' anno. Si cerca la grandezza del capitale medesimo dopo un tempo qualunque $t$, essendo $c$ quella che esso ha nel primo momento dell' impiego (ss).



(ss) Essendo $\omega : 1$ la ragione annua del censo semplice, ella è $\omega dt : 1$ la ragione istantanea; poichè nel censo semplice l' interesse dee essere proporzionale al tempo. Dunque 1 nel primo istante dell' impiego produce il frutto $\omega dt$, e questo dovendosi aggiugnere al capitale, il capitale stesso nel secondo istante sarà $1 + \omega dt$; e poichè 1 produce il frutto $\omega dt$, così $1 + \omega dt$ darà il frutto $\omega dt + \omega^2 dt^2$ che aggiunto al capitale $1 + \omega dt$ del secondo istante dà $1 + 2\omega dt + \omega^2 dt^2 = (1 + \omega dt)^2$ per grandezza del capitale nell' istante terzo, ec. dal che si scorge che il capitale così posto a censo va ingrandendosi del pari che se fosse impiegato a censo composto continuo sotto la ragione istantanea di $\omega dt : 1$. Dunque la grandezza del capitale $c$ dopo il tempo $t$ sarà $ce^{\omega t}$.

In fine un problema che porta al risultato stesso, e la cui esposizione ha alquanto di analogia con quella del problema di Bernoulli è il seguente.

4.° Ad un dato capitale si vuole aggiugnere in ogni istante successivo una parte proporzionale all' istante stesso di quel tale annuo interesse che verrebbe prodotto dal capitale medesimo, quando venisse impiegato con quella grandezza che trovasi avere in quell' istante medesimo, in cui deve essere aumentato; cosicchè se le grandezze del detto capitale negl' istanti successivi, attesi gli aumenti che vanno facendosi, siano $c, c', c'', c'''$, ec., gli aumenti stessi da farsi successivamente devono essere parti degli annui interessi che verrebbero prodotti dai capitali medesimi $c, c', c'', c'''$, ec. posti in usuale impiego, e proporzionali queste parti ciascuna all' istante, a cui compete. Si cerca cosa diventerà $c$ in un tempo qualunque $t$, supposto che l' impiego usuale debba farsi in ragione di $\omega$ per 1 all' anno ($tt$).

---

($tt$) Impiegato usualmente il capitale $c$ in ragione di $\omega$ per 1 all' anno, si dedurrebbe $c\omega$ per

§. 46. Di queste cinque esposizioni di problemi, a cui compete l'equazione $v = ce^{\omega t}$ per risultato, nessuna, cred' io, include il senso inchiuso nell' enunciato del problema di Bernoulli, quale è esposto al §. 25. L' ul.



annuo frutto del capitale stesso; e quindi parte di questo frutto proporzionale al primo istante $dt$ sarà $c\omega dt$, e questa aggiunta al capitale $c$ darà $c + c\omega dt = c(1 + \omega dt)$ che indicherà la grandezza che ha il capitale dopo il primo istante. Con questa grandezza posto in usuale impiego in ragione di $\omega$ per 1 all' anno darebbe l' annuo frutto $c\omega(1 + \omega dt)$. Parte di questo proporzionale all' istante secondo (che suppongo uguale al primo ed a ciascun altro) sarà $c\omega dt(1 + \omega dt)$, e questa aggiunta al capitale quale era dopo il primo istante darà $c(1 + \omega dt) + c\omega dt(1 + \omega dt) = c(1 + \omega dt)^2$ che indicherà la grandezza del capitale dopo l' istante secondo. Così vedo che la grandezza di questo capitale sarà $c(1 + \omega dt)^3$ dopo l' istante terzo, sarà $c(1 + \omega dt)^4$ dopo l' istante quarto ec. ec.; e dopo l' istante $m^{esimo}$, cioè dopo il tempo $t$ la nominata grandezza sarà espressa da $c(1 + \omega dt)^m$. Ma al §. 3. si è ridotto $(1 + \omega dt)^m$ ad $e^{\omega t}$. Dunque la grandezza a cui giugne il dato capitale nel tempo $t$ sarà pure $ce^{\omega t}$, cioè il capitale $c$ aumentato continuamente nel prescritto modo diventa nel tempo $t$ della grandezza $ce^{\omega t}$.

tima delle esposizioni stesse, sebbene abbia il più d'analogia con quella del problema Bernoulliano, non può in alcun modo con essa confondersi. E in fatti nel nostro problema non si tratta che di aggiugnere al capitale quella tale quantità prescritta, senza che nemmeno sia necessario di considerare che il capitale dato sia posto a censo; anzi il censo usuale, di cui si parla nell' esposizione medesima, può essere indifferentemente o semplice o composto comunque, senza che ne derivi un divario nel risultato; nè è necessasio che si considerino le quantità stesse, che si aggiungono al capitale, quali interessi prodotti dal capitale medesimo negl' istanti a cui competono; e più, quando il censo usuale fosse censo composto continuo, le quantità, che è prescritto d'aggiugnersi, sarebbero tutt' altro che gl' interessi prodotti negl' istanti a cui si riferiscono. Al contrario nel problema Bernoulliano il capitale s' intende che sia posto a censo; e sciolto esso, come è sciolto da Bernoulli, non sarebbero che i suoi proprj frutti le quantità che si aggiungono al capitale. In oltre noi abbiamo considerato una infinità di annui frutti, i quali sarebbero i corrispondenti alle varie grandez-

ze che ha il capitale ne' successivi istanti, ed i quali effettivamente non si producono, ma che verrebbero soltanto prodotti, qualora si mettessero a censo per un anno tanti capitali quanti sonovi istanti parimenti in un anno, ed avente ciascuno successivamente quella grandezza che ha il capitale proposto negl' istanti successivi; quando da Bernoulli non si considera, nè si parla che di un solo annuo interesse, che è il corrispondente al capitale dato, e la cui grandezza si ammette per costante.

Altri riflessi potrebbero farsi ancora in distinzione de' quì considerati due problemi; ma superfluo reputo il dilungarmi ulteriormente, e non ne faccio quindi altra parola.

§. 47. In conclusione di quanto abbiamo sin' ora esposto riterremo dunque che al problema del censo composto continuo compete l'equazione $v = c(1+\omega)^t$; e che al problema Bernoulliano, se non sono io in errore, compete quest' altra $v = \ldots c\left(1 + \frac{\omega t}{2+\omega}(2+\omega t)\right)$; e finalmente che l'equazione $v = ce^{\omega t}$ si riferisce a problema che non è nè l'uno nè l'altro de' due indi-

cati, quando per $\omega$ s' intenda rappresentato il frutto anno dell' unità.

§. 48. Per altro, che l'ordinario problema del censo composto continuo fosse diverso da quello proposto da Bernoulli, lo fecero abbastanza osservare, Fontana nelle sue Disquisizioni Fisico-matematiche alla pag. 61., e Frisi nel tomo primo delle sue Opere alla pag. 202; per cui strano dee sembrare a chiunque come il Prof. Lotteri dopo avere trovato, § 12. del citato suo libro, l'equazione $v = ce^{\omega t}$ per quella che compete all' ordinario problema del censo composto continuo, e $v = ce^{\omega}$ pel caso che il tempo dell' impiego limitato sia alla durata precisamente di un anno, abbia potuto figurarsi, e dire in conseguenza che i quì nominati due Autori, unitamente a Bernoulli, si trovino con lui d'accordo nel risultato del problema medesimo.

§. 49. L' indicato equivoco però possiamo in certo modo valutarlo di niuna conseguenza; quello che interessa si è che il Prof. Lotteri, fissatosi ed appoggiatosi sull' equazione $v = ce^{\omega t}$, come su quella che unicamente compete al censo composto continuo, ha disseminato molte parti del suo libro di

deduzioni tratte dall' equazione stessa, le quali perciò fanno che una tale equazione influisca su d'una quantità di risultati spettanti ad altre quistioni e problemi. Ora se l' appoggio è insussistente, come sussistere possono le conseguenze che se ne deducono? Io non voglio incaricarmi di riandarle, e lascio che il Prof. medesimo si dia la cura di farne l'analisi, e dare quindi l'ultimo grado di perfezione alla sua Opera, che tanto interessar dee ogni genere di persone. Mi accontenterò di dire solo, che pure ritenere si possono per esatte le formole spettanti a censo composto continuo ed altre analoghe, che in quel libro ci vengono presentate, qualora s' intenda che l' annuo interesse dell' unità sia ivi rappresentato da $e^{\omega} - 1$, in vece di esserlo dal semplice $\omega$. Se di fatti la ragione istantanea $\omega dt : 1$, che porta al risultato $v = ce^{\omega t}$, conduce pure ad aversi $e^{\omega}$ per montante dell' unità in un anno, è evidente che il frutto annuo dell' unità non è altro che $e^{\omega} - 1$.

§ 50. Se non è mio scopo poi l' analizzare le conseguenze dedotte da un principio insussistente, non lo è niente più il sindacare le parti rimanenti di un libro, che voglio

sperare verrà dal suo Autore rifuso con ogni diligenza e cura. Mi si permetta però che qualche parola io faccia per mostrare l'esattezza d'alcun' altra formola creduta erronea, e che diffenda così chi avendone fatto uso viene in certo modo attaccato; come pure che alcuna cosa dica a maggiore e più facile intelligenza di qualche passo che può essere suscettibile di rischiarimento.

§. 51. Non sarebbe mai abbastanza commendata l'Operetta del Prof. Lotteri, di cui parliamo, s'ella non fosse stata precipitata, da quello che pare, in un troppo scarso tempo. Ella tratta i problemi di censo i più generali, ella abbraccia pressochè tutti i più interessanti ed i più adattabili alla pratica; ma fatalità vuole che le cose più importanti non si maturino con la dovuta ponderazione e tempo sufficiente. Così al §. 40. si legge: *Il Gjardiner nelle nozioni preliminari alle Tavole logaritmiche (uu) propone il problema di trovare il tempo, in cui debbasi anticipare tutta ad un tratto la somma* $v + v' + v''$

(*uu*) Ediz. di Callet Parigi 1783. N.° XXI, art. 9.

+ ec. *di più debiti* $v, v', v''$, *ec. pagabili rispettivamente dopo i tempi* $t, t', t''$, *ec. Ma siccome egli ha adottato per formola del censo composto* $v = c(1 + u)^t$ *colla comune degli Scrittori, quindi trova, sostituendo* $v + v' + v'' +$ *ec. in vece di* $c$, $\theta = \frac{1}{\log. p}\left[\log.(v + v' + v'' + \text{ec.}) - \log.\left(\frac{v}{p^t} + \frac{v'}{p^{t'}} + \frac{v''}{p^{t''}} + \text{ec.}\right)\right]$. *Ma dalle cose che premesse abbiamo, apparisce chiaramente, che questa equazione non può essere vera che nel particolarissimo caso che il numeratore di questa frazione diviso pel denominatore desse un numero intero per quoto.*

Per essere corrente a se stesso non bastava il dire che il numeratore diviso pel denominatore desse un numero intero per quoto; bisognava incominciare dal dire che non poteva essere vera la riferita equazione se non nel particolarissimo caso, in cui i tempi $t, t', t''$, ec. fossero tutti numeri interi, ed in cui poi il numeratore della frazione diviso pel denominatore desse un numero intero per quoto; e di fatti, secondo lo stesso Lotteri, non possono le espressioni $\frac{v}{p^t}$, $\frac{v'}{p^{t'}}$, $\frac{v''}{p^{t''}}$ ec. rappresentare i veri valori presenti di

$v, v', v''$, ec., se non sono $t, t', t''$, ec. interi.

Quello per altro che parmi debba fare più specie si è che il Prof. Lotteri prende la formola del Gardiner pel censo interpolato, quando dal Gardiner stesso si diede pel censo continuo. Ecco le parole di questo Autore: *Un debiteur doit payer les sommes $B, C, D, E$, etc. respectivement aux termes $b, c, d, e$, etc.; il voudroit acquitter sa dette en un seul payement $p = B + C + D + E +$ etc.; en quel temps peut-il faire ce payement ( eu égard aux intérêts sur intérêts ) sans faire tort ni à son créancier ni à lui-même* (xx)*?* Non solo però il Lotteri parla della formola di Gardiner a proposito del censo interpolato; ma torna poi a richiamarla anche al §. 43., dove parla di censo composto continuo: *E nel caso*, dice egli, *contemplato dal Gardiner* ( richiama il §. 40. ) *di* $c = v + v' + v'' +$ *ec.*

---

(xx) Le quantità che dal Gardiner si denominano $B, C, D, E$, ec. sono quelle che dal Lotteri vengono chiamate $v, v', v''$, ec.; e così i tempi detti dal Gardiner $b, c, d, e$, ec. dal Lotteri sono indicati con $t, t', t''$, ec.

*sarebbe* $\theta = \frac{1}{\omega \log. e}\Big[\log. (v + v' + v'' + \text{ec.}) -$
$\log\left(ve^{-\omega t} + v'e^{-\omega t'} + v''e^{-\omega t''} + \text{ec.}\right)\Big]$,
*espressione ben diversa dall' assegnata da lui, quand' anche per censo composto intender volesse il censo da noi chiamato continuo.*

§. 51. Riflettendo però che il Prof. Lotteri fece fruttare il suo danaro nella ragione di $e^{\omega} - 1$ per 1 all' anno, § 49., dove Gardiner lo fece fruttare nella ragione di $\omega$ per 1, se sostituiremo $\omega$ in vece di $e^{\omega} - 1$, come abbiamo indicato allo stesso §. 49., troveremo che la formola del Lotteri . . . .

$$\theta = \frac{1}{\omega \log. e}\Big[\log. (v + v' + v'' + \text{ec.}) - \log.\left(ve^{-\omega t} + v'e^{-\omega t'} + v''e^{-\omega t''} + \text{ec.}\right)\Big]$$

viene appunto a coincidere con quella del Gardiner. Di fatti sostituendo $\omega$ in luogo di $e^{\omega} - 1$, ossia $1 + \omega$ in luogo di $e^{\omega}$, ovvero $(1 + \omega)^{t}$ in vece di $e^{\omega t}$, od anche $\frac{1}{(1 + \omega)^{t}}$ in vece di $e^{-\omega t}$; e $\log.(1 + \omega)$ in luogo di $\omega.\log. e$, la precedente equazione veste la forma

$$\theta = \frac{1}{\log.(1 + \omega)}\Big[\log. (v + v' + v'' + \text{ec.}) -$$

$$log.\left(\frac{v}{(1+w)^{t}}+\frac{v'}{(1+w)^{t'}}+\frac{v''}{(1+w)^{t''}}+ec.\right)\Big],$$

ossia mettendo $p$ per $1+w$, diventa

$$\theta = \frac{1}{log.p}\Big[log.(v+v'+v''+ ec.) - log.\left(\frac{v}{p^{t}}+\frac{v'}{p^{t'}}+\frac{v''}{p^{t''}}+ ec.\right)\Big],$$

che è appunto quella del Gardiner, la quale dal Lotteri vorrebbesi proscritta. Mettendoci dunque nell' ipotesi del Gardiner e della comune degli Scrittori, anche dal calcolo dello stesso Lotteri deduciamo la loro equazione; e quindi parmi potersi francamente asserire che essa non è in alcun modo mancante; che è esatta.

§. 53. Ma se questa equazione vale pel censo composto continuo non può valere poi pel censo composto interpolato. La cosa è per se evidente, quando i tempi $t, t', t''$, ec., e $\theta$ non sieno numeri interi. Il Lotteri però ci somministra la formola anche per questo caso; onde non occorre altro. Un momento: La formola data dal Lotteri pel censo interpolato è esattissima ogni volta che i pagamenti $v$ $v'$, $v''$, ec. vengono tutti anticipati; ma nel caso che tal uno venisse posticipato anche la formola del Lotteri è insufficiente.

Poichè valore presente di $v$ da pagarsi dopo $t = \tau + \rho$ sarà bensì $c = \frac{v}{p^{\tau}(1 + \omega\rho)}$; ma quando il pagamento di $v$ debba posticiparsi del tempo $t = \tau + \rho$, il suo valore non sarà più espresso da $c = \frac{v}{p^{-\tau}(1 - \omega\rho)}$, ma da $c = vp^{\tau}(1 + \omega\rho)$, che è evidentemente diverso dal precedente. Dunque l' esempio che il Lotteri propone al § 41., col quale si domanda il tempo $\theta$, in cui dovrà farsi il pagamento $c = v + v'$ tutto ad un tratto per scontare due debiti $v.v'$, pagabili il primo dopo il tempo $t$, l'altro dopo il tempo $t'$, non può essere esattamente sciolto dall' equazione $v + v' = \frac{v}{p^{\tau}(1 + \omega\rho)} + \frac{v'}{p^{\tau'}(1 + \omega\rho')}$. Egli è di fatti evidente che se si vogliono pagare tutto ad un tratto due somme $v, v'$ che si pagherebbero in due rate separate, una ad un tempo, l'altra ad un altro, egli è evidente, dico, che una somma dovrà posticiparsi, se l'altra viene anticipata (yy). Pel

(yy) Anche il calcolo dello stesso Prof. Lotteri fatto per l' esempio da lui portato al §. 41. mostra

che se il tempo dell' anticipazione dell' una sia $\tau + \rho$, e 'l tempo della posticipazione dell' altra sia $\tau' + \rho'$ (22), dovrà aversi

$$s = v + v' = \frac{v}{p^{\tau}(1+\omega\rho)} + v' p^{\tau'}(1 + \omega\rho')$$

e non altro.

§. 54. Ciascun vede a questo proposito che quando, invece di trattare un tal problema a censo composto interpolato, si trattasse a censo composto continuo, non s' incontrerebbe più l'inconveniente che qui abbiamo incontratto. Il valore presente di una somma $v$ pagabile dopo il tempo $t$, suppo-

---

rebbe che la somma di 100 viene posticipata, mentre l'altra di 50 viene anticipata. Il pagamento della prima è fissato dopo gli anni $3\frac{1}{2}$, e quello della seconda dopo gli anni $5\frac{1}{2}$; il risultato del calcolo porta che tutto debba pagarsi dopo anni 4,0358 circa. Dunque anche secondo un tal calcolo una somma viene posticipata, mentre l' altra è anticipata, quando tutto si vuole pagare ad un tempo.

(22) Avvertasi che qui non s' intende prendere i tempi $\tau + \rho = t$, nè $\tau' + \rho' = t'$; ma bensì $\tau + \rho = t - \theta$, e $\tau' + \rho' = t' - \theta$, indicando $\theta$ il tempo, dopo cui il pagamento dee farsi tutto ad un tratto.

sto $p = 1 + \omega$, sarebbe $c = \frac{v}{p^t}$; e quando anche $t$ fosse negativo, cioè il pagamento dovesse posticiparsi, il valore della somma posticipata sarebbe sempre $c = \frac{v}{p^{-t}} = vp^t$, senza contraddizione alcuna. Così nel caso che voglia pagarsi tutto ad un tratto la somma $c = v + v'$, essendo $v$ pagabile dopo il tempo $t$, e $v'$ pagabile dopo il tempo $t'$; e che per conseguenza si debba anticiparne una, mentre si posticipa l'altra, si avrà sempre $c = v + v' = \frac{v}{p^{t-\theta}} + \frac{v'}{p^{t'-\theta}} = \frac{v}{p^t} \times p^\theta + \frac{v'}{p^{t'}} \times p^\theta = p^\theta \left( \frac{v}{p^t} + \frac{v'}{p^{t'}} \right)$; da cui $\theta . log. p = log.(v + v') - log. \left( \frac{v}{p^t} + \frac{v'}{p^{t'}} \right)$, ossia

$$\theta = \frac{log.(v + v') - log.\left( \frac{v}{p^t} + \frac{v'}{p^{t'}} \right)}{log. p};$$

come il Gardiner.

§. 55. E' inutile l'avvertire che, se il problema non è esattamente sciolto nel caso

del censo composto interpolato dalla formola $c = v + v' = \frac{v}{p^{\tau}(1+\omega\rho)} + \frac{v'}{p^{\tau'}(1+\omega\rho')}$ (*aaa*), non lo può egualmente essere nel caso del censo semplice dalla formola $c = v + v' = \frac{v}{1+\omega(t-\theta)} + \frac{v'}{1+\omega(t'-\theta)}$, presentata dal Prof. Lotteri al §. 32. Quando $\theta$ sia maggiore di $t$, la precedente equazione diventa $c = v + v' = \frac{v}{1-\omega(\theta-t)} + \frac{v'}{1+\omega(t'-\theta)}$; ma l'essere $\theta$ maggiore di $t$, vuole dire che $v$ dee essere posticipato; ed in tal caso il valore che dee ricevere $v$ posticipato del tempo $\theta - t$ si è $v(1+\omega(\theta-t))$, che è ben diverso da $\frac{v}{1-\omega(\theta-t)}$. Dunque nell'esempio portato dal Prof. Lotteri al §. 45. non sarà vero che per l'interesse semplice il tempo debba essere $\theta = 4{,}0293$ anni, come viene da lui indicato.

§. 56. Una delle parti più interessanti della dottrina de' censi si è quella che riguar-

(*aaa*) Ritengasi, riguardo al tempo $\tau + \rho$, ciò che si è detto nella nota precedente.

da le annuità; ed in questa per problema di molta importanza dee considerarsi quello in cui si tratta di consumare con una annuità, da godersi per un dato numero di anni, un dato capitale che si lascia a frutto sino a che non è esso consonto.

Un tal problema, che da alcuni viene anche detto *problema di sconto*, si suol generalmente sciogliere nel modo seguente, e può esporsi così:

Da un capitale $c$ posto a censo in ragione di $\omega$ per 1 all'anno si leva in fine d'ogni anno, oltre all' interesse prodotto in quell' anno dal capitale impiegato una porzione del capitale medesimo, in modo che per un numero $n$ di anni si percepisca costantemente l'annuità $a$, e non rimanga più cosa alcuna in impiego dopo un tal tempo. Si dimanda un' equazione tra $c$, $a$, $\omega$, ed $n$.

Nel prim' anno d'impiego il capitale $c$ monta a $c(1+\omega)$; e pagata in fine di anno l' annuità $a$ rimane a frutto la somma $c(1+\omega)-a$. Questa nel second' anno ascende a $c(1+\omega)^2-a(1+\omega)$. Pagata di nuovo l' annuità $a$ rimarrà in impiego pel terz' anno la somma $c(1+\omega)^2-a(1+\omega)-a$. Questa diventa in fine dell' anno terzo

$c(1+\omega)^3 - a(1+\omega)^2 - a(1+\omega)$; e pagata nuovamente l' annuità $a$, resterà impiegata per l' anno quarto la quantità $c(1+\omega)^3 - a(1+\omega)^2 - a(1+\omega) - a$; da cui si avrà in fine d' anno $c(1+\omega)^4 - a(1+\omega)^3 - a(1+\omega)^2 - a(1+\omega)$. Pagata ancora l' annuità $a$, rimarrà a frutto per l' anno susseguente la somma $c(1+\omega)^4 - a(1+\omega)^3 - a(1+\omega)^2 - a(1+\omega) - a$. Così proseguendo successivamente si vede che si giugnerà in fine dell' anno $n^{esimo}$ ad aversi $c(1+\omega)^n - a(1+\omega)^{n-1} - a(1+\omega)^{n-2} \ldots - a$. Se in questo tempo tutto dev' essere consonto, è chiaro che si avrà $c(1+\omega)^n - a(1+\omega)^{n-1} - a(1+\omega)^{n-2} \ldots\ldots - a = 0$; da cui $c(1+\omega)^n = a \ldots\ldots + a(1+\omega)^{n-2} + a(1+\omega)^{n-1}$; ossia

$$c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega},$$

che è l' equazione dimandata.

§. 57. Ora una tale equazione è ella generale per qualunque valore di $n$, oppure non vale che per $n$ intero? Comunemente si è presa per generale, ed atta a soddisfare in ogni caso, e per qualsivoglia valore aver potesse la $n$. Dal Prof. Lotteri però, ai §§. 65. e 67. della citata sua Opera, si è

giudicato essere ella mancante della necessaria generalità, e che valere non possa se non per $n$ intero. Tale opinione del Prof. Lotteri sembra anche appoggiata; poichè trattandosi di censo semplice un capitale che rimane in impiego per una porzione $r$ di anno non può moltiplicarsi che per $1+r\omega$ affine di aversi il suo montante per una tale porzione di tempo. Così se impiegando il capitale $c$. e levando dall' impiego ogni anno l' annuità $a$, si ha in fine di un numero $n$ intero di anni la quantità $c(1+\omega)^n - \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$; rimanendo questa impiegata ancora per la porzione $r$ dell' anno successivo diverrà

$$\left[c(1+\omega)^n - \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}\right](1+r\omega).$$

Quindi pagando la porzione $ra$ di annua pensione, corrispondente al tempo $r$, risulterà per ultimo

$$\left[c(1+\omega)^n - \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}\right](1+r\omega) - ra = 0;$$

espressione ben diversa dalla precedente, quand' anche in essa venga espresso il tempo con $n+r$.

Con tutto ciò non pare verosimile che tanti Autori e Uomini celebri non s' accorgessero mai che quella equazione fosse mancante; e scorgendo che regge solo per $n$ intero non ne dessero una generale per un tempo di qualsivoglia durata.

Che per avventura l'equazione $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$ potesse competere al censo composto continuo? Allora certamente che sarebbe essa dotata della opportuna generalità. Ma un tal sospetto sembra alquanto aereo; tanto più che qualche Autore, il quale pur presenta l'equazione $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$ per risultato del problema in quistione, intende e si esprime che l'impiego venga fatto a censo semplice (*bbb*).

(*bbb*) Osservisi il §. 476. Probl. XXXI. di De Marie Ediz. 3.ª di Firenze, come pure il §. 1108., dove essendo proposto il problema in quistione viene appunto espresso che il censo debba essere semplice; nè l'equazione ivi presentata per risultato di tal problema è diversa della nostra. Avvertasi però che siffatta esposizione di problema non compete al De Marie, ma che è data dai PP. Canovai e Del-Ricco.

Ad ogni modo esaminiamo la cosa più intrinsecamente.

§. 58. Incomincio pertanto a riflettere che un capitale impiegato a censo semplice non viene moltiplicato che per un multiplo di $\omega$, non mai per una potenza dell' $\omega$ stesso; le potenze dell' $\omega$ compètono al censo composto. Ma nel rintracciare l'equazione $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$ si passò a moltiplicare, e $c$, ed $a$ per tutte le potenze successive di $1+\omega$ sino alla potenza $(1+\omega)^n$, che pure rimane nell' equazione medesima. Dunque l'andamento tenuto nel rintracciare siffatta equazione, come pure l'equazione stessa, sembra competere più al censo composto che al censo semplice.

§ 59. Rifletto pure che il primo membro $c(1+\omega)^n$ dell' equazione medesima rappresenta il montante del capitale $c$ impiegato per anni $n$ a censo composto, e che il secondo $\frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$ rappresenta egualmente il montante pel censo composto dell' annuità $a$ pagabile in fine di ogni anno, ed arretrata per anni $n$. Ciò vale quanto dire che l'equazione $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$ com-

pete al problema di trovare il valore presente di una annuità $a$ impiegata *a censo composto continuo* in ragione di $\omega$ per 1 all' anno, la quale annuità dovrebbe pagarsi in fine di ogni anno per un numero di anni $n$ (ccc).

---

(ccc) Egli è il metodo usuale quello di sciog'iere il qui indicato problema cercando il montante d' una annuità arretrata, e quello di un capitale lasciato in impiego per un egual tempo, ed uguagliando in fine i due montanti medesimi; ciò che non dà luogo a difficoltà, nè ad obbiezione, se si tratti di censo composto. Metodo più diretto però si è quello di trovare il valore presente di ciascuna somma $a, a, a$, ec. pagabili l' una dopo il primo anno, l'altra dopo il secondo, la terza dopo il terzo, ec. Qualunque però sia il metodo che si tenga, sempre si giugne al risultato medesimo. La formola $c = v \frac{(1 - e^{-n\omega})}{e^{\omega} - 1}$ presentata dal Prof. Lotteri al §. 44. per tale oggetto, e rintracciata appunto in quest' ultimo modo, sebben sembri diversa, si riduce pure alla nostra, facendovi le opportune correzioni. Sostituisco pertanto, come al §. 52., $\omega$ ad $e^{\omega} - 1$, ed $\frac{1}{(1+\omega)^n}$ ad $e^{-n\omega}$, e la formola stessa si trasmuta in quest' altra $c = v \frac{\left(1 - \frac{1}{(1+\omega)^n}\right)}{\omega}$, os-

Se si potesse asserire che questo problema non è diverso da quello di *sconto*, proposto

---

sia $c(1+\omega)^n = \frac{v\left((1+\omega)^n - 1\right)}{\omega}$, che coincide appunto colla nostra, indicando $v$, ed $a$ la stessa cosa.

Metodo poi elegantissimo di trovare il montante dell' annuità arretrata, e che mostra che gli uomini grandi sono tali anche nelle cose minime, qualora vi porgano la loro attenzione, si è quello che il Cel. Greg. Fontana ha indicato nel Prodr. dell' Enc. It. all' art. Anat.

Ecco in che consiste questo metodo:

L' annuità $a$ può riguardarsi come il frutto annuo di un capitale di grandezza conveniente a dare tal frutto; quindi l' annuità stessa non è che l' aumento del detto capitale prodotto in un anno; e 'l montante dell' annuità medesima arretrata per anni $n$ non è che l' aumento del nominato capitale prodotto in $n$ anni. Ora essendo $\omega$ l' aumento dell' unità in un anno, ed $(1+\omega)^n - 1$ l' aumento pure dell' unità in anni $n$, si ha l' analogia: come l' aumento $\omega$ di 1 in un anno al suo aumento $(1+\omega)^n - 1$ in $n$ anni, così l' annuità $a$ che è l' aumento dell' accennato capitale nel primo anno all' annuità arretrata per anni $n$; cioè $\omega : (1+\omega)^n - 1 :: a : M = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$, indicando con $M$ il cercato montante.

il § 56., il dubbio parrebbe pressochè sciolto. Ora cosa esprime un' equazione? Se non altro che la relazione che passa tra suoi elementi. Dunque l' equazione $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$ esprime la relazione che passa tra una annuità $a$ da godersi per un numero $n$ di anni, ed un capitale $c$ sborsabile al momento, calcolando *il censo composto continuo* in ragione di $\omega$ per 1 all' anno. Una tale relazione, se non isbaglio, è appunto quella che sostanzialmente si cerca col problema di sconto, quando questo pure s' intenda trattarsi a censo composto continuo.

§ 60. Malgrado quanto abbiam detto ne' due paragrafi precedenti, altro riflesso ci presenta più che forte ragione per dire al contrario che il problema di sconto non può trattarsi se non a censo semplice. Una somma dicesi impiegata a censo composto, allorchè gl' interessi prodotti ne' tempi successivi

---

* Di qui poi, se $c$ sia il capitale capace di montare pure ad $M$ in $n$ anni d' impiego, si avrà anche $c(1+\omega)^n = M$; e quindi $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$.

si fanno passare in capitale, affinchè producano essi pure i loro frutti nel rimanente tempo dell' impiego; ed allorquando i frutti non si dessumono che dal puro capitale, questo dicesi impiegato a censo semplice. Ora nel problema di sconto si tolgono dall' impiego in fine d' ogni anno i frutti prodotti nell' anno stesso, e non rimane a fruttare negli anni successivi che puro capitale; dunque in esso il censo non sarà che semplice (*ddd*).

---

(*ddd*) Rapporto a ciò che succede in capo a ciascun anno pare certo che il censo non possa essere che semplice; ma riguardare si dee il continuo dell' impiego, e non considerarlo a salto per salto. Ora la somma che trovasi in impiego al principio di ciascun anno può giugnere in capo all' anno al montante stesso tanto col censo semplice, quanto col composto; e così unendosi il termine di ciascun anno col principio del successivo sembra pure che il censo possa essere e semplice e composto per tutta la durata dell' impiego. Quando però si voglia intendere che nel corso di ciascun anno non debbasi toccare il capitale impiegato, e lasciarlo giugnere al suo montante in capo all' anno, per sottrarvi solo allora l' annuità, è chiaro che, se l' equazione di cui si parla non include che questa ipotesi, l' equazione stessa non può va-

Qui per altro conviene avvertire che quando il censo è semplice non solo i frutti prodotti non si fanno passare in capitale, ma rimangono ben anche oziosi nelle mani del debitore; ed allorchè il censo è composto i frutti prodotti rimangono ancora nelle mani del debitore, ma non vi rimangono infruttuosi. Se pertanto nel problema di sconto i frutti vengono levati dall' impiego tostochè sono essi prodotti, non può dirsi che il censo sia semplice o composto dal non farsi o farsi passare i frutti in capitale (*eee*). Da tutt' altro dee decidersi dunque la quistione; e pare che meglio non si possa giugnere all' intento, che dall' osservare quale siasi la ra-

---

lere che per $n$ intero. Onde niente da ciò in conclusione di quanto investighiamo.

(*eee*) A farci propendere al giudizio, che nell' attual caso il censo sia composto anzichè semplice, non pare senza peso la ragione seguente: nel censo composto, e non nel semplice, tutto il danaro che trovasi nelle mani del debitore non vi rimane infruttuoso. Nel problema di sconto tutto il danaro che rimane presso il debitore è tutto fruttifero; dunque questo problema ha qualche cosa di analogo più col censo composto che col semplice.

gione istantanea, con cui i frutti si fanno produrre.

§. 61. Nel censo semplice la ragione istantanea con cui i frutti devono prodursi è espressa da $\omega dt : 1$, denotando $\omega : 1$ la ragione annuale. Nel censo composto continuo la ragione istantanea è indicata da $\frac{1}{m} . log\ (1 + \omega) : 1$, quando pure $\omega : 1$ rappresenti l'annuale (*fff*). Se vale dunque la prima a condurci all' equazione $c(1 + \omega)^n = \frac{a(1 + \omega)^n - a}{\omega}$, converrà confessare che l'equazione stessa competa al censo semplice; se vale la seconda diremo, che compete al composto continuo; e se valgono entrambe competerà sì all' uno che all' altro. Ciò veduto, ogni difficoltà, come io credo, sarà spianata.

---

(*fff*) Rappresentando con $\omega$ il frutto annuo dell' unità; il frutto da essa prodotto in un istante, è $\omega dt$, quando il censo sia semplice §. 15., ed è $\frac{1}{m} log. (1 + \omega)$, allorchè il censo è composto continuo §. 13. Dunque $\omega dt : 1$ esprimerà la ragione istantanea pel censo semplice, ed $\frac{1}{m} log\ (1 + \omega) : 1$ quella pel censo composto continuo.

§ 62. Intraprendo dunque di sciogliere il problema servendomi e dell' una, e dell' altra ragione; ma servendomi primieramente della seconda, cioè sciogliendo da prima il problema pel censo composto continuo, giudico di poter camminare per via più piana.

Di qualunque delle due ragioni mi serva poi è chiaro che passando per tutti gl' istanti successivi compresi dal primo momento dell' impiego sino all' ultimo, qualunque sia la durata di questo tempo, si vedrà pure se l' equazione di cui si ragiona sia o non sia assolutamente generale per qualunque valore avere possa la $n$.

In vano si cercherebbe di passare per tutti gli istanti sciogliendo il problema, se non si presentasse ad ogni istante la grandezza a cui si riduce il capitale impiegato, e diminuito a norma del tempo trascorso, relativamente alla pensione $a$ che deve annualmente levarsi dall' impiego; come se un istante qualunque dovesse essere l' ultimo momento dell' impiego, ossia quello in cui il capitale posto a censo termina di consumarsi. Da ciò si vede che invece di levarsi dall' impiego l' annuità $a$ in fine d' ogni anno, dovrà all' opposto levarsi ad ogni istante

una porzione dell' annuità stessa; ciò che sarà permesso, purchè tale porzione abbia una grandezza conveniente (*ggg*). Questa grandezza però sarà conveniente, quando l'annuità *a* pagata in fin di anno equivalga a tutte le porzioni pagate invece di essa in tutti gl' istanti compresi nell' anno; ma se le porzioni si pagano anticipatamente al tempo in cui si pagherebbe l'annuità *a*, os-

(*ggg*) Prescrivendo il problema che si debba levare dall' impiego la somma *a* in fine di ciascun anno, pare in tal qual modo che si muti la sostanza del problema stesso, levandone invece una porzione in ciascun momento. Ma se non è lecito di permutare la pensione *a* annuale in un equivalente da prendersi in ciascuno istante, non è neppure possibile di sciogliere il problema passando per tutti gli istanti successivi compresi nel tempo dell' impiego; ed in tal caso il problema stesso non competerà che ad *n* intero, e vanamente si domanderà quindi se l' equazione risultante sia generale per qualunque valore di *n*. Del resto trattandosi di censo composto continuo nessun divario ne risulta dal levare una somma in un momento invece di levarsene un' altra in altro momento; quando la prima levata in quel primo momento sia il valore della somma seconda pagabile all' altro momento.

sia se questa viene pagata dopo i tempi in cui si devono pagare le porzioni, l'annuità stessa $a$ pagate in fine d'anno equivarrà a tutte le porzioni pagate ne' successivi istanti compresi nell' anno, quando $a$ uguagli il montante di tutte le porzioni arretrate.

Dicasi pertanto $\alpha$ una di queste porzioni da pagarsi in ogni momento, la somma delle quali è equivalente alla pensione annua $a$ da pagarsi in fine di anno; e daremo ad $\alpha$ il nome di *pensione istantanea*. Ritengo poi che il frutto istantaneo dell' unità $\frac{1}{m} log. (1 + \omega)$ sia indicato da $r$. Ciò posto è chiaro che il capitale $c$ nel primo istante dell' impiego monterà a $c(1+r)$; e pagata l'istantanea pensione $\alpha$, rimarrà a frutto la quantità $c(1+r) - \alpha$, la quale nel secondo istante giugnerà a $c(1+r)^2 - \alpha(1+r)$; e pagata nuovamente la pensione istantanea $\alpha$ resterà a frutto la quantità $c(1+r)^2 - \alpha(1+r) - \alpha$; e questa nel terzo istante ascenderà a $c(1+r)^3 - \alpha(1+r)^2 - \alpha(1+r)$; da cui levato di nuovo $\alpha$, rimarrà $c(1+r)^3 - \alpha(1+r)^2 - \alpha(1+r) - \alpha$, che nel quarto istante diverrà $c(1+r)^4 - \alpha(1+r)^3 - \alpha(1+r)^2 - \alpha(1+r)$, e pagata ancora $\alpha$ si avrà $c(1+r)^4 - \alpha(1+r)^3 - \alpha(1+r)^2 -$

$\alpha(1+r)-\alpha$ a frutto nel quinto istante; e così successivamente, per modo che dopo un numero $M$ d' istanti, qualunque sia $M$, si avrà $c(1+r)^M - \alpha(1+r)^{M-1} - \alpha(1+r)^{M-2} - \alpha(1+r)^{M-3} \ldots\ldots - \alpha$. Indichi ora $m$ il numero degl' istanti compresi in un anno, ed $n$ il numero intero o rotto degl' istanti, per cui dee durare il censo; e sia $nm = M$, e si avrà $c(1+r)^{nm} - \alpha(1+r)^{nm-1} - \alpha(1+r)^{nm-2} - \alpha(1+r)^{nm-3} \ldots - \alpha$. Ma spirato il tempo $n$ tutto dee essere consonto; dunque avremo $c(1+r)^{nm} - \alpha(1+r)^{nm-1} - \alpha(1+r)^{nm-2} - \alpha(1+r)^{nm-3} \ldots\ldots - \alpha = 0$; da cui $c(1+r)^{nm} = \frac{\alpha(1+r)^{nm} - \alpha}{r}$. Indicando poi $r$ il frutto istantaneo dell' unità, ed $m$ il numero degl' istanti compresi in un anno, giacchè pure si considera quì che l' impiego si sia fatto a censo composto continuo, sarà $(1+r)^m$ il montante per un anno dell' unità stessa, ossia si avrà $(1+r)^m = 1 + \omega$ (*hhh*); e



(*hhh*) La posizione $(1+r)^m = 1 + \omega$ si è già fatta pel censo composto continuo al §. 12.; ed appunto da questa si è dedotto poi al §. 13. il valore

quindi $(1+r)^{nm}=(1+\omega)^{n}$. Dunque sostituendo questo valore nell' equazione precedente, essa diverrà $c(1+\omega)^{n} = \frac{a(1+\omega)^{n}-a}{r} = \frac{a}{r}\left[(1+\omega)^{n}-1\right]$. Inseguito se l' annuità $a$ dee valutarsi come il montante della istantanea pensione $\alpha$ arretrata per un anno, trovando un tal montante si avrà con che esprimere anche il valore di $a$. Ora il montante dell' istantanea pensione $\alpha$ arretrata per un anno, e spettante pure al censo composto continuo è evidentemente $\alpha(1+r)^{m-1}+\alpha(1+r)^{m-2}+\alpha(1+r)^{m-3} + \ldots\ldots + \alpha = \frac{\alpha(1+r)^{m}-\alpha}{r}$; dunque $\frac{\alpha(1+r)^{m}-\alpha}{r} = a$; ossia, per essere $(1+r)^{m} = 1+\omega$, avremo $a = \frac{\alpha(1+\omega)-\alpha}{r} = \frac{\alpha\omega}{r}$; e quindi $\frac{\alpha}{r} = \frac{a}{\omega}$. Dunque sostituendo $\frac{a}{\omega}$ in luogo di $\frac{\alpha}{r}$ nell'

---

di $r$ espresso da $\frac{1}{m} log.(1+\omega)$. Siffatta posizione dunque equivale al rimettersi $\frac{1}{m} log.(1+\omega)$ in luogo della $r$.

equazione $c(1+\omega)^n = \frac{a}{r}\left[(1+\omega)^n - 1\right]$,
otterremo finalmente $c(1+\omega)^n =$
$\frac{a}{\omega}\left[(1+\omega)^n - 1\right] = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$.

Facendo dunque fruttare istantaneamente il capitale impiegato nella ragione di $1 : \frac{1}{m} log.(1+\omega)$; competente al censo composto continuo, vale a dire sciogliendo il problema di sconto supposto che l'impiego si faccia a censo composto continuo, si giugne all' equazione

$$c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}.$$

Dunque a buon conto quest' equazione compete al censo composto continuo, ed in tale ipotesi gode, come è chiaro, di tutta la generalità possibile; e sia pure $n$ intero o rotto comunque, e sempre si avrà da tale equazione quel valore che le si dimanda.

Ci resta ora a vedere se anche colla ragione istantanea $\omega dt : 1$ che compete al censo semplice possa giugnersi del pari alla medesima equazione. Ma prima dirò una parola che spetta ancora al censo composto continuo.

§. 63. Ad una cosa conviene fare attenzione, ed è che essendo $a$ l'annuità per un anno intero, non dee credersi poi che sia $\frac{a}{k}$ la porzione di annuità competente alla porzione $k^{esima}$ di anno. Questa porzione di annuità non può essere altro che il montante dell' istantanea pensione $\alpha$ arretrata per la $k^{esima}$ parte di anno. Sarà dunque espressa da $\alpha(1+r)^{\frac{m}{k}-1} + \alpha(1+r)^{\frac{m}{k}-2} + \alpha(1+r)^{\frac{m}{k}-3} \ldots\ldots + \alpha =$

$$\frac{\alpha(1+r)^{\frac{m}{k}}-\alpha}{r} = \frac{\alpha}{r}\left[(1+r)^{\frac{m}{k}}-1\right] =$$

$$\frac{\alpha}{r}\left[(1+\omega)^{\frac{1}{k}}-1\right] = \frac{a}{\omega}\left((1+\omega)^{\frac{1}{k}}-1\right)$$

(*iii*). Così nel particolar caso che l'annuità

---

(*iii*) Coerentemente a ciò che si è detto nella nota *ccc* si può trovare la porzione di annuità corrispondente ad una data porzione di anno nel modo seguente: Considerando $a$ come il frutto annuo di un capitale avente la grandezza opportuna a dare tal frutto, la porzione dell'annuità corrispon-

fosse di 45, e 'l censo fosse in ragione di $\frac{9}{16}$ per 1 all' anno, la porzione di annui-



---

dente alla $k^{esima}$ porzione di anno non sarà che la porzione del detto annuo frutto corrispondente alla stessa $k^{esima}$ porzione di anno. Diremo dunque: frutto annuo dell' unità sta al frutto dell' unità stessa prodotto nella $k^{esima}$ parte dell' anno, come frutto annuo del nominato capitale sta al frutto del capital medesimo prodotto nel tempo stesso $\frac{anno}{k}$,

cioè $\omega : (1+\omega)^{\frac{1}{k}} - 1 :: a : \frac{a}{\omega}\left[(1+\omega)^{\frac{1}{k}} - 1\right]$.

Si potrebbe ben anche cercare qual sia il capitale capace di produrre l' annuo frutto $a$, indi vedere cosa produce il capital medesimo nel tempo $k^{esimo}$ dell' anno; ciò che indicherebbe egualmente la cercata porzione di annuità da pagarsi corrispondentemente al tempo $\frac{anno}{k}$. Facendo pertanto

$\omega : 1 :: a : \frac{a}{\omega}$, si vede essere $\frac{a}{\omega}$ il capitale capace di produrre annualmente il frutto $a$. Inseguito osservando che montante di $\frac{a}{\omega}$ per la $k^{esima}$ parte dell' anno è $\frac{a}{\omega}(1+\omega)^{\frac{1}{k}}$, si vede chiaramente che

tà competente ad un mezzo anno sarebbe

$$\frac{45}{\frac{9}{16}}\left(\left(1+\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)=5.16\left(\frac{5}{4}-1\right)=20.$$

Quando dunque l' annuità fosse di 45, la porzione da pagarsi corrispondentemente ad un mezzo anno non sarebbe che 20.

§. 64. Per tentare presentemente se anche la ragione istantanea $\omega dt : 1$ competente al censo semplice valga a condurci all' equazione $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$ non v' è bisogno di ricominciare tutto il calcolo da capo; servire ci possiamo dell' espressione $c(1+r)^{nm} = \frac{a(1+r)^{nm} - a}{r}$, a cui siam giunti nel §. 62. Basterà a tale effetto che quì si muti convenientemente il valore della $r$ rappresentatrice del frutto istantaneo dell' unità, e si dia pure ad $a$ quel valore che dall' attuale ipotesi si richiede. Il valore

---

frutto del capitale $\frac{a}{\omega}$ prodotto nel tempo stesso non è che $\frac{a}{\omega}(1+\omega)^{\frac{1}{k}} - \frac{a}{\omega}$.

che di presente indicar dee la $r$ è $\omega dt$, quello di $\alpha$ sarà $adt$, se si vuole che ad una parte qualunque di anno corrisponda una parte dell' annua pensione proporzionale al tempo stesso. Sostituiti pertanto ad $r$, e ad $\alpha$ i qui indicati valori, l' equazione precedente si troverà espressa sotto quest' altra forma $c(1+\omega dt)^{nm} = \frac{adt(1+\omega dt)^{nm} - adt}{\omega dt}$ $= \frac{a(1+\omega dt)^{nm} - a}{\omega}$. Inoltre con calcolo analogo a quello che nel §. 3. si fece per la riduzione di $(1+\omega dt)^m$, troveremo che $(1+\omega dt)^{nm} = e^{\omega n}$ (kkk). Quindi, sostituendo pure $e^{\omega n}$ in luogo di $(1+\omega dt)^{nm}$, la nostra equazione si ridurrà in fine a

$$c.e^{\omega n} = \frac{a.e^{\omega n} - a}{\omega}.$$



(kkk) Nel §. 3. la specie $m$ rappresentava il numero degl' istanti compresi nel tempo $t$; onde allora $mdt = t$. Nel caso attuale $m$ non rappresenta che il numero degl' istanti compresi in un anno; onde presentemente $mdt = 1$, e rappresentando poi $nmdt$ il numero degl' istanti compresi nel tempo $n$, sarà pure $nmdt = n$. Per cui appunto si deduce $(1+\omega dt)^{nm} = e^{\omega n}$.

Colla ragione dunque istantanea $\omega dt$: a competente al censo semplice non scontriamo più l'equazione $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$; quindi asserir possiamo che il censo semplice non ha a che fare con siffatta equazione.

§. 65. Ella però può competere al censo composto interpolato; ma in questa ipotesi non può valere che per $n$ intero; e per renderla generale per qualsivoglia durata di tempo $n+r$ (indicando $n$ un numero intero, ed $r$ una frazione aggiunta) dovrà darlesi la forma $c(1+\omega)^n \times (1+r\omega) = \frac{(a(1+\omega)^n - a)(1+r\omega)}{\omega} + ra$ che il Prof. Lotteri al §. 65. le assegna pel censo semplice.

§. 66. In conclusione di quanto abbiamo esposto, parmi che male a proposito il Prof. Lotteri, al § 67., accusi la discordanza del risultato di Eulero da quello trovato da lui. L'Eulero si servì della formola $c(1+\omega)^n = \frac{a(1+\omega)^n - a}{\omega}$, e quindi trattò il problema a censo composto continuo. Il Lotteri si propose di trattarlo a censo semplice, sebbene lo abbia trattato a censo composto in-

terpolato. Dunque il problema stesso fu sciolto in due ipotesi diverse; dunque diversi essere doveano i risultati.

L'indicata discordanza de' due risultati; quello dell' Eulero, e quello del Prof. Lotteri, proviene ben anche da altro motivo. L'Eulero assegna ciò che dee restituirsi al debitore, pagata che abbia la 33.esima annata, cioè spirati gli anni 33. dopo il momento in cui incominciò l'impiego, ed il risultato presentato dal Prof. Lotteri, compete agli anni 32,9866. Se avesse pur egli differito a fare il pagamento sino allo spirare del 33 esimo anno, avrebbe trovato pressochè niun divario dal valore assegnato dall' Eulero.

§. 67. Altro problema di sconto, che è diverso dal precedente nell' esposizione, ma che in sostanza è il medesimo, si è quello propostosi dal Prof. Lotteri al §. 68., e che al §. 71. avverte egli appartenere a La Place.

L'esposizione di tal problema secondo il Lotteri è questa: Il capitale *c* è impiegato a condizione, che dal debitore si paghi annualmente la parte *m*esima di esso detraendo però da questo interesse la parte *t*esima del medesimo, in modo che al fine del primo anno il proprietario non riceva che

$\frac{c}{m} - \frac{c}{ml}$. Il debitore però, qualunque ne sia il motivo, paga tutti gli anni la costante quantità $\frac{c}{m}$, cioè più del convenuto; il creditore acconsente che questo di più estingua a poco a poco il capitale. Si vuol sapere cosa sarà diventato il capitale $c$ dopo il tempo $n + r$ (indicando $n$ un intero, $r$ una frazione aggiunta).

Pel caso che dopo il tempo $n + r$ il capitale $c$ debba essere consonto, il risultato che ne presenta il Prof. Lotteri si è l'equazione $\left(l - \left(1 + \frac{1}{m} - \frac{1}{ml}\right)^n\right)\left(1 + \frac{r}{m} \times \frac{(l-1)}{l}\right) - \frac{r(l-1)}{m} = 0$. Da La Place invece viene assegnata l'equazione $l - \left(1 + \frac{l-1}{ml}\right)^{n-1} = 0$.

A due cause attribuisce il Prof. Lotteri al §. 72. la discordanza di questi due risultati. *La prima*, dice egli, *è quella di non avere introdotto La Place, giusta il general costume, il rotto* r, *per cui la sua formola è limitata al solo caso di* n *intero, e quindi insufficiente a trovare il tempo con esattezza. La seconda* (è sempre il Prof. Lotteri che parla) *proviene da ciò che avendo La Place*

*ricavato il valore di quanto rimane in impiego dopo il tempo* n *dall' integrazione di una formola a differenze finite, nel determinare la solita costante, ha supposto che detto valore fosse* = c, *quando* n = 1; *ciò che non può aver luogo, mentre è chiaro che in impiego si trova* c, *quando* n = 0.

La Place non introduce il rotto *r* nella sua formola perchè intende che *n* comprenda anche il rotto stesso, senza esprimerlo separatamente dal numero intero. E La Place poteva farlo, se intendeva che nel suo problema si facesse l'impiego a censo composto continuo. Ora il problema stesso, come si è già avvertito, si riduce sostanzialmente al problema di sconto; dunque anche in quello il censo può essere composto continuo come in questo, e quindi *n* può rappresentare un tempo qualunque, e la formola risultante non mancherà in niente di generalità per mancanza d'essersi introdotto il rotto *r* separato dall' *n*.

Della seconda mancanza attribuita a La Place pare che non si possa scusare; giacchè la formola dimandata dal problema dee essere $l - \left(1 + \frac{l-1}{ml}\right)^n = 0$, e non $l - \left(1 + \frac{l-1}{ml}\right)^{n-1} = 0$, se s'intende che *n* rap-

presenti il tempo trascorso. Avvertendo però che La Place nell' introdursi alla soluzione del suo problema pone che sia $y_n$ ciò che è diventato il capitale $c$ all' anno $n^{esimo}$, si vede che egli con $n$ nomina gli anni *ordinalmente* e non *numeralmente*, e quindi $n$ non rappresenta gli anni trascorsi, ma l'anno che scorre allorchè il capitale impiegato è giunto a tale o tal' altra grandezza; e così è chiaro che $y_n = c$ nell' anno primo, cioè quando $n = 1$. Ma per applicare poi la sua formola ai casi particolari avrebbe dovuto La Place sostituire in fine nella formola stessa il numero indicante gli anni trascorsi a quello che indica l'anno che corre; come appunto ha praticato nel preciso problema di sconto, che è l'altro che si propose inseguito al sovresposto.

Così non avendolo fatto anche nel primo, trova che l'estinzione di un capitale impiegato secondo le condizioni del proposto problema, valutando l'interesse in ragione del 5 per 100, e fissando ad un decimo il diffalco da farsi dell' interesse medesimo, trova, dico, che l'estinzione del detto capitale succede l'anno 53,3, cioè dopo il 53 esimo anno, quando non si richiedono che anni 52,3, come appunto ha trovato il Prof. Lotteri.

§. 68. Per vedere ora se il proposto problema coincide con quello di sconto, osservo primieramente che si è preso $\frac{c}{m} - \frac{c}{ml}$, ossia $c\left(\frac{l-1}{ml}\right)$ per frutto annuo di $c$; e che quindi il censo si è fissato in ragione di $\frac{l-1}{ml}$ per 1 all'anno; in secondo luogo si è stabilito di pagarsi annualmente la quantità costante $\frac{c}{m}$. Dunque se facciasi $\frac{l-1}{ml} = \omega$ e $\frac{c}{m} = a$ l'esposizione del problema proposto può ridursi a questa: Il capitale $c$ è impiegato in ragione di $\omega$ per 1 all'anno; ma il debitore paga annualmente la somma $a$, maggiore del frutto di $c$ già convenuto; il creditore acconsente che il di più estingua a poco a poco il capitale; questo si estingue di fatti in anni $n$. Si cerca un'equazione tra $c$, $a$, $\omega$, ed $n$.

Ora non è questo in sostanza il problema di sconto? Dunque la sola esposizione del proposto problema modificata nelle espressioni, e non nella sostanza, basta a mostrarci che il problema stesso non è altro che quello di sconto; ma vediamone anche il

risultato che alla primitiva esposizione si riferisce.

L' equazione trovata da La Place è $l-\left(1+\frac{l-1}{ml}\right)^{n-1}=0$; ma in questa il numero $n$ non indica gli anni trascorsi, indica invece l'anno che corre dopo l'estinzione del dato capitale.. Quindi volendo che $n$ rappresenti gli anni trascorsi l'equazione sarà $l-\left(1+\frac{l-1}{ml}\right)^{n}=0$. Sostituisco ora ad $\frac{l-1}{ml}$ il suo valore $\omega$; e così ad $l$ il suo valore $\frac{a}{a-c\omega}$, dedotto dalle equazioni $\frac{l-1}{ml}=\omega$, e $\frac{c}{m}=a$, e l' equazione stessa $l-\left(1+\frac{l-1}{ml}\right)^{n}=0$ verrà segnata sotto quest' altra espressione $\frac{a}{a-c\omega}-(1+\omega)^{n}=0$, ossia $a=a(1+\omega)^{n}-c\omega(1+\omega)^{n}$, o in fine così $c(1+\omega)^{n}=\frac{a(1+\omega)^{n}-a}{\omega}$. Dunque anche l' equazione risultante mostra egualmente che il proposto problema si riduce a quello di sconto, come si è asserito.

§. 19. Daremo fine al presente scritto con alcune riflessioni sulla discordanza di pa-

rere tra d'Alembert e 'l Prof. Lotteri, mostrata da quest' ultimo al §. 82., relativamente al potersi o non potersi combinare le due supposizioni, che l'interesse annuo sia $\omega$, e l'interesse corrispondente ad $\frac{1}{k}$ di anno sia $\frac{\omega}{k}$; come pure relativamente alla specie di censo che meriterebbe di essere preferita ne' contratti come la più conforme alla giustizia, la meno soggetta a portarsi in errore, ed in tal qual modo la più facile a trattarsi. Oggetti entrambi che pur giudico poter meritare l'attenzione nostra.

Una materia già trattata da un d'Alembert può essere suscettibile di ben poco sviluppo; pure, giacchè il Prof. Lotteri non rimase persuaso da ciò, che d'Alembert ha detto, mi proverò anch' io se valgo a rendere la cosa alcun poco più chiara e manifesta.

Ciò che ha detto d'Alembert relativamente al primo punto può ridursi a un di presso a questo: Se, trattandosi di censo composto, si stabilisca $\frac{\omega}{k}$ per frutto di 1 corrispondente ad $\frac{1}{k}$ di anno, il frutto an-

nuo verrà espresso da $\left(1+\frac{\omega}{k}\right)^k - 1$; ma $\left(1+\frac{\omega}{k}\right)^k - 1 = \omega + \frac{(k-1)}{2} \cdot \frac{\omega^2}{k} + \frac{(k-1)(k-2)}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\omega^3}{k^2} +$ ec. $> \omega$. Dunque, pel censo composto, quando per frutto corrispondente ad $\frac{1}{k}$ di hanno si stabilisca la quantità $\frac{\omega}{k}$, il frutto annuo è maggiore di $\omega$. Dunque per questa specie di censo le due supposizioni di frutto annuo $= \omega$, e di frutto corrispondente ad $\frac{1}{k}$ di anno $= \frac{\omega}{k}$ sono incompatibili.

Cosa può mai obbiettarsi a siffatto raziocinio? Non è esso di tutta l'evidenza? Pure il Prof Lotteri mostra di non valutarlo. Qual mai altro più forte e convincente potrà dunque aggiugnervisi? Forse niuno. Niente di meno vediamo di prendere la cosa per altro verso.

Sabilisco pertanto che il frutto annuo di 1 sia $\omega$; e dimandando pure $x$ il frutto di 1 corrispondente ad $\frac{1}{k}$ di anno, sarà poi

$1+x$ il montante di 1 corrispondente al tempo stesso $\frac{1}{k}$ di anno, ed $(1+x)^2$ il montante corrispondente a $\frac{2}{k}$ di anno, $(1+x)^3$ il corrispondente a $\frac{3}{k}$ di anno, ec., ed $(1+x)^k$ il montante corrispondente al numero $k$ di $k^{\text{esimi}}$ di anno, ossia il montante per l'anno compito; e quindi $(1+x)^k - 1$ l'annuo interesse. Ma nel censo composto, come nel semplice, gl' interessi devono prodursi in modo che giungano ad una data somma in un dato tempo; perciò essendo fissato che 1 in un anno debba produrre $\omega$, $x$ dee essere di tale grandezza che $(1+x)^k - 1 = \omega$. Di quì poi $x = (1+\omega)^{\frac{1}{k}} - 1$. Stabilito dunque che l'interesse annuo essere debba $\omega$, l'interesse corrispondente ad $\frac{1}{k}$ di anno non può essere che $(1+\omega)^{\frac{1}{k}} - 1$. Se lo è dunque $(1+\omega)^{\frac{1}{k}} - 1$

$$= \frac{\omega}{k} + \frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)}{2}\omega^2 + \ldots\ldots$$

$$\frac{\frac{1}{k}\left(\frac{1}{k}-1\right)\left(\frac{1}{k}-2\right)}{2 \cdot 3}\,\omega^3 + \text{ec. non lo sarà}$$

più $\frac{\omega}{k}$.

Osservo inoltre che $\frac{\omega}{k} : \omega :: \frac{1}{k} : 1$, cioè che le quantità $\frac{\omega}{k}$ ed $\omega$ sono proporzionali ai tempi $\frac{1}{k}$ di anno, ed 1 anno intero. Dunque se $\frac{\omega}{k}$ ed $\omega$ fossero i frutti corrispondenti ai tempi $\frac{1}{k}$ di anno, ed un anno intero, i frutti sarebbero proporzionali ai tempi in cui si producono. Ora una tale proporzione può ella competere al censo composto continuo? Io non so che competa se non al censo semplice. Dunque nel solo censo semplice (che pure comprende evidentemente il composto interpolato pel corso di ciascun anno) e non nel composto continuo, possono combinarsi le due supposizioni che $\omega$ sia il frutto annuo di 1, ed $\frac{\omega}{k}$ il frutto di 1 corrispondente ad $\frac{1}{k}$ di anno.

Il Prof. Lotteri per altro sembra che, trattandosi di censo composto continuo, non ammetta essere $\omega$ l'annuo frutto dell'unità; e di fatti in tale ipotesi egli fece che l'unità producesse in termine di un anno il frutto $e^{\omega}-1$. Ma, ripetendo ciò che altrove abbiam già detto, se l'annuo frutto di 1 è $e^{\omega}-1$, come può dirsi che l'impiego si faccia in ragione di $\omega$ per 1 all'anno? Quando si dice che un capitale si dà a censo in ragione di $\omega$ per 1 all'anno, s'intende che ogni unità del capitale dia di frutto in capo all'anno la quantità $\omega$ e non altro; e così quando l'annuo frutto fosse $e^{\omega}-1$, la ragione con cui i frutti si produrrebbero annualmente sarebbe quella di $e^{\omega}-1$ per 1, e non quella di $\omega$ per 1. Ogni appiglio quindi sembrami tolto per poter continuare a sostenere che nel censo composto continuo, come nel censo semplice, possano ad un tempo essere $\omega$ il frutto annuo, ed $\frac{\omega}{k}$ il frutto corrispondente ad $\frac{1}{k}$ di anno.

Se ciò sta, e se il problema di sconto compete al censo composto continuo, non sarà più vero che il problema di annuità in-

terpolata; propostosi dal Prof. Lotteri al §. 73. sia sciolto valutando l' interesse in ragione di $\omega$ per 1 all' anno, come si è prefisso; ma lo sarà invece per l'ipotesi che l'interesse dovesse prodursi nella ragione di $\left(1+\frac{\omega}{k}\right)^k-1$ per 1 all' anno.

§. 60. Riguardo alla specie di censo che meriterebbe di esser preferita ne' contratti, rifletto primieramente che nel censo semplice, o si paghi il frutto al momento che termina di maturare, o ne venga differito il pagamento dopo qualunque tempo, e 'l creditore ne riceve sempre la somma medesima. Ma avere una somma in un tempo ed averla in un altro, è egli lo stesso? La somma che si riceve ad un tempo non si può impiegare tosto e cavarne altro frutto nel tempo successivo? Di questo secondo frutto dunque dovrebbe il creditore esserne indennizzato dal debitore, che ritarda il pagamento del primo. Ma il censo semplice di questa specie d'indennizzazione non ne dà alcuna. Nel censo composto continuo invece, quando il pagamento de' frutti venga ritardato, questi non restano infruttuosi, e danno pure al creditore quell' utile, che potrebbe

trarne dal danaro medesimo. Può succedere all' opposto che il debitore paghi qualche somma, come frutto già prodotto, innanzi il tempo convenuto; ne avrà questi perciò un utile? Il censo semplice non lo dà. Il solo composto continuo riconosce tale anticipazione e ne indennizza. Ma il sol vedere continuamente il frutto già prodotto restare ozioso nelle mani del debitore non sveglia qualch' idea che siffatta maniera di procedere sia in tal qual modo in urto colla giustizia? Niente di tutto ciò col censo composto continuo. Nel censo composto continuo, dove viene servata la perfetta continuità di aumento del danaro posto in impiego si ha sempre il preciso valore della somma, che il debitore ha nelle mani in ogni momento, e sempre questo censo mostra ciò che costituisce il preciso debito del debitore maturato nel momento stesso che si considera. Mostra che se il valore di una somma in un momento è tale, in altro momento, comunque anteriore o posteriore al primo, sarà tal altro. Nel censo composto continuo dunque, e non nel semplice, scorgiamo continuità perfetta, esattezza e giustizia.

Che poi il censo composto continuo sia men soggetto a condurci in errore che il censo semplice, o 'l composto interpolato, lo possiam vedere da più d'un esempio. Ne reco alcuno. Il metodo usuale di trovare il valor presente di una annuità, vale a dire quello di trovare il montante di una annuità lasciata in impiego, ed il montante di un certo capitale supposto egualmente impiegato per la stessa durata di tempo, e di uguagliare indi i due montanti, è noto che ha portato in errore parecchi Analisti ( Vedasi il mio Saggio Analitico sopra una svista comune ec. ); ma con quale specie di censo s'incorse questo errore? Non è egli col semplice? Col composto non si sbagliò. Trattandosi del problema, col quale si propose di trovare il tempo in cui pagare tutto ad un tratto due somme $v$, $v'$ pagabili, la prima dopo il tempo $t$, la seconda dopo il tempo $t'$ ( Vedansi i §§. 53., 54., 55. ), non è nel censo semplice, e nel composto interpolato che le formole mancano? Nel composto continuo non manca mai.

Quale dunque sarebbe la specie di censo da desiderarsi che venisse preferita ne' contratti? Ciascun lo dica; e dicendolo cre-

derei che dir potesse: *quella del senso composto continuo*.

Il Prof. Lotteri però non è di questo sentimento. *Io*, dic' egli al citato §. 82., *sarei d' avviso di ripudiare il composto nel senso e nel modo trattato da d' Alembert*, vale a dire nel senso e nel modo trattato comunemente, *lasciando la preferenza al semplice*; *giacchè non da questo, ma da quello nascono tutte le contraddizioni, che egli trova. Nelle specie di censo da me considerate non nasce paradosso alcuno, e tutto mi pare conforme all' aspettazione ed alla ragione*.

E quale è poi il sodo fondamento su cui s' appoggian siffatte opinioni? E come meglio appoggiate saran le mie?

Ciascun il parto suo rimira
Come il model di perfezione.

Pavia 7. Germile An. IX. R.

| ERRORI | | | CORREZIONI |
|---|---|---|---|
| Pag. 11 | lin. 8 | guidan | giudican |
| — 41 | 17 | pargr. | paragr. |
| — 45 | 8 | *u* | *n* |
| — 46 | 6 | sfuga | sfugga |
| — 47 | 6 | uoto | voto |
| — 61 | 12 | intesesse | interesse |
| — 62 | 15 | sconti | scopra |
| — 65 | 14 | indicamo | indicammo |
| — 66 | 15 | *forziori* | *fortiori* |
| — 69 | 15 | giunto | giunti |
| — 76 | 8 | il uopo | l' uopo |
| — | 21 | un finir | un non finir |
| — 80 | 25 | abbi | abbia |
| — 81 | 16 | intetesse | interesse |
| — 102 | 2 | $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^2}{a}$ | $\frac{\left(a+\frac{b}{n}\right)^3}{a}$ |
| — 110 | 26 | stessa | stesso |
| — 114 | 8 | procedente | precedente |
| — 122 | 20 | *Giardiner* | *Gardiner* |
| — 123 | 12 | quarto | quoto |
| — 124 | 23 | $v\ v, v''$ | $v, v', v''$ |
| — 128 | 11 | incontratto | incontrato |
| — 131 | 3 | anunità | annuità |
| — 138 | 2 | Se non | Non |
| — 145 | 10 | . . . . $a$ | . . . . $-a$ |
| — 147 | 2 | otteremo | otterremo |
| — 155 | ult. | $l-\left(1+\frac{l-1}{lm}\right)^{n-1}$ | $l-\left(1+\frac{l-1}{lm}\right)^{n-1}=0$ |
| — 160 | 5 | di hanno | anno |





